

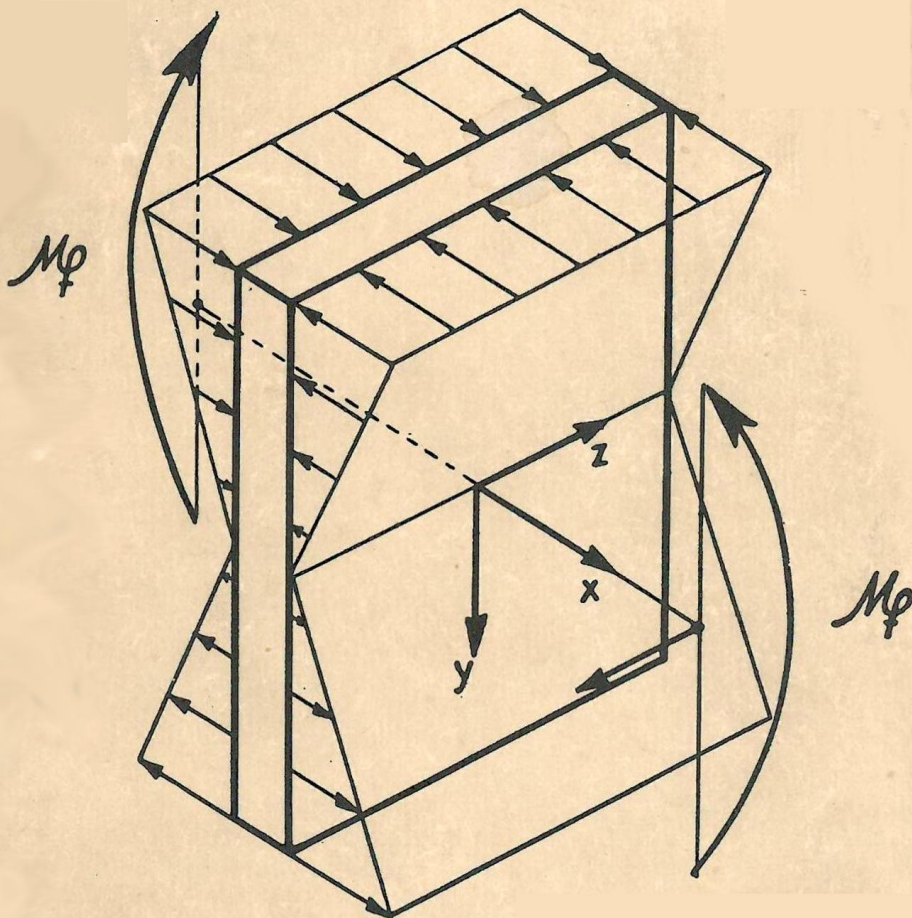


E. T. S. I.

Caminos, Canales y Puertos

apuntes de resistencia de materiales

(con más de 200 problemas resueltos)



1 9 6 6
MADRID

SERVICIO DE PUBLICACIONES DE ALUMNOS



apuntes de
resistencia de materiales

Por: A. Morales Bueso

J. E. Ruíz García

J. Rui - Wamba

J. L. Sáenz de Urturi

J. Sánchez Rivera

C. Sanchidrián Fernández

Ingenieros de Caminos

Dep. legal: M-14.900/966

Litoprint
Tel. 2 46 47 14
M A D R I D

1-1. - HIPOTESIS FUNDAMENTALES DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES.- 1-2.-ESFUERZOS A QUE PUEDE ESTAR SOMETIDA UNA REBANADA. 1-3.-TRACCION Y COMPRESION SIMPLES

I-1. - HIPOTESIS FUNDAMENTALES DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES.

A) De situación

- 1) Admitimos la continuidad de la materia.
- 2) Admitimos que las acciones representadas por fuerzas son magnitudes vectoriales que están en equilibrio y que se aplican con lentitud suficiente para que no se produzcan vibraciones e intercambios de calor.

B) Constructivas

- 1) Admitimos que el sólido obedece a la ley de Hooke y que es homogéneo e isótropo.
- 2) Admitimos un estado neutro que no tiene deformaciones ni tensiones.
- 3) Admitimos que las acciones mutuas entre dos elementos superficiales de sólidos se pueden representar por fuerzas superficiales.

C) Simplificativas

- 1) Prescindimos del efecto local de las fuerzas.
- 2) Prescindimos del pandeo.
- 3) Prescindimos de las vibraciones en las fuerzas exteriores producidas por la deformación de la estructura.
- 4) Admitimos el principio de Saint-Venant.

"Pueden sustituirse las cargas por otras equivalentes siempre que la sección que se estudie no esté cerca del punto de aplicación de una de las fuerzas."

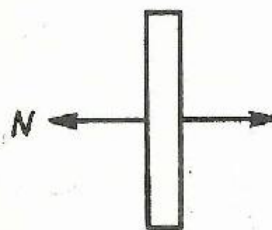
- 5) Admitimos la hipótesis de Navier. - "Las secciones planas antes de la flexión continúan planas después de flectar".

Como consecuencia de estas hipótesis podemos aplicar el principio de superposición de efectos. Si una estructura o parte de ella se le somete a un estado de cargas I y posteriormente a un estado de cargas II adquiere un estado de tensiones y de deformaciones análogo al que adquiriría por aplicación simultánea de las cargas I + II".

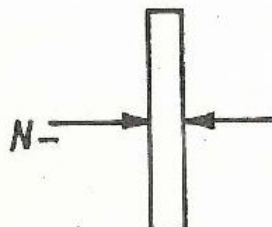
I-2. ESFUERZOS A QUE PUEDE ESTAR SOMETIDA UNA REBANADA. -

Si consideramos un tramo cualquiera de una cierta estructura sometida a una serie de cargas exteriores, y dentro de ese tramo, queremos estudiar la forma en la que trabaja una rebanada, bastará con suprimir las dos partes de la estructura adjuntas a las caras de la rebanada y sustituirlas por las acciones o esfuerzos que dichas partes ejercían sobre ella. Como antes de suprimir la estructura y efectuar la sustitución, la rebanada en estudio estaba en reposo y equilibrio, de ello se deduce que las acciones que posteriormente hemos introducido sobre ella deberán también estar en equilibrio.

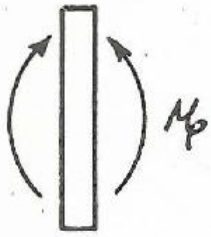
Según el tipo de sollicitación a que esté sometida la estructura, las acciones antes indicadas pueden ser:



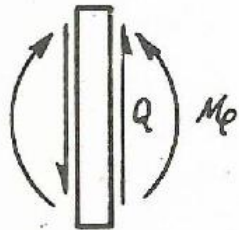
Tracción simple. El esfuerzo axial o axial N es el conjunto de las dos fuerzas.



Compresión simple. El esfuerzo axial o axial N es el conjunto de las dos fuerzas.

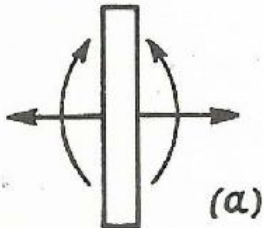


Flexión pura. El momento flector M_f es el conjunto de los dos momentos.

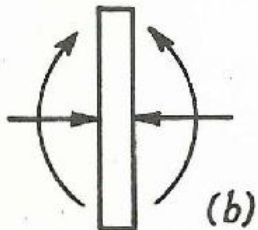


Flexión simple $\left\{ \begin{array}{l} M_f \text{ momento flector.} \\ Q \text{ esfuerzo cortante.} \end{array} \right.$

El esfuerzo cortante Q , es el conjunto de las dos fuerzas.



(a), (b) y (c) reciben el nombre de Flexión compuesta. Los casos (a) y (b) equivalen a desplazar el esfuerzo N del eje. (Como se ha indicado en (c).



También se llama flexión compuesta si existe además esfuerzo cortante.



Nota: No puede existir esfuerzo de cortadura simple solamente, por no encontrarse la rebanada en equilibrio, pues la acción del par $\overline{OO'}$ no está equilibrado por ningún otro esfuerzo.

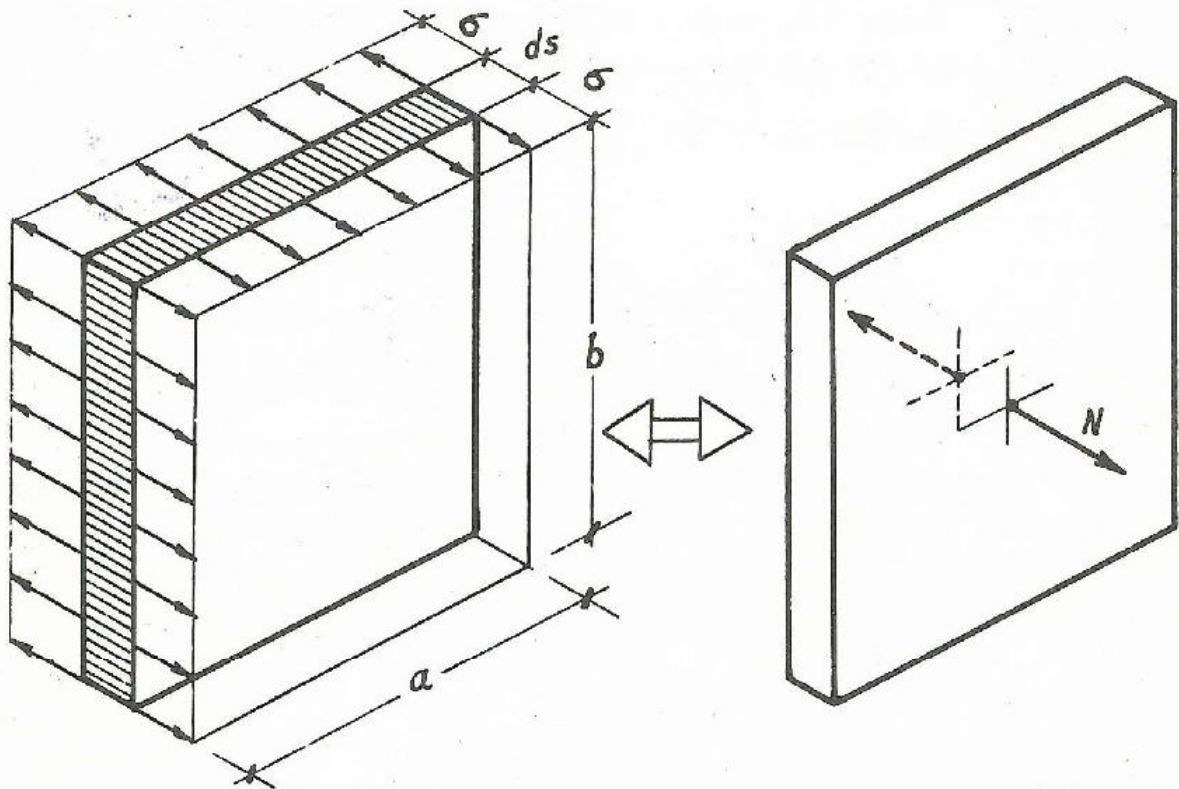


I-3. - TRACCION Y COMPRESION SIMPLE. - Una rebanada está sometida a tracción simple, cuando cada cara está solicitada por un sistema de fuerzas iguales, normales a ellas y de sentido contrario, siendo cada sistema equivalente a una fuerza aplicada en el c. de g. de la cara correspondiente.

$$N = \sum \sigma_i = a \cdot b \cdot \sigma = \Omega \sigma$$

El Momento en el c. de g. de ambos sistemas es nulo.

En el cálculo de una pieza solicitada a tracción y compresión



simple consideraremos que:

Las tensiones son proporcionales a las deformaciones (Ley de Hooke), $\sigma = E \epsilon$.

$$\text{tensión} = \frac{\text{Esfuerzo axial}}{\text{sección}}, \sigma = \frac{N}{\Omega}$$

$$\text{alargamiento unitario} = \frac{\text{alargamiento}}{\text{longitud inicial}} = \frac{\Delta l}{l_0} = \epsilon$$

Asímismo prescindiremos de la disminución de sección frente al alargamiento.

Compresión simple. - Análogo a la tracción con sistemas de vectores iguales pero de signo contrario produciendo un acortamiento en lugar de alargamiento

-o-

EJERCICIOS:

1º. Determinar el alargamiento total de una barra de acero de 60 cm. de longitud si la tensión de tracción es igual a 1.000 Kg/cm².

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2.$$



$$\sigma = 1000 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\underline{\underline{\sigma = E \cdot \epsilon}}$$

Alargamiento unitario:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{1000 \text{ Kg/cm}^2}{2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l = l \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 60 \text{ cm} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 0,3 \text{ mm}.$$

La barra queda con una longitud final de

$$L = l + \Delta l = 60 + 0,03 = 60,03 \text{ cm}.$$

-o-

29. Una barra prismática de acero de 60 cm. de longitud alarga 0,6 mm. bajo la acción de una fuerza extensora. Hallar el valor de la fuerza si el volumen de la barra es 16 cm³.

$$\text{Area de la sección recta} = \frac{V}{l} = \frac{16}{60} \text{ cm}^2 = 0,266.$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{E \Omega}$$

$$0,6 = \frac{F}{2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2 \cdot 0,266 \text{ cm}^2}$$

$$dF = 532 \text{ Kgs}.$$

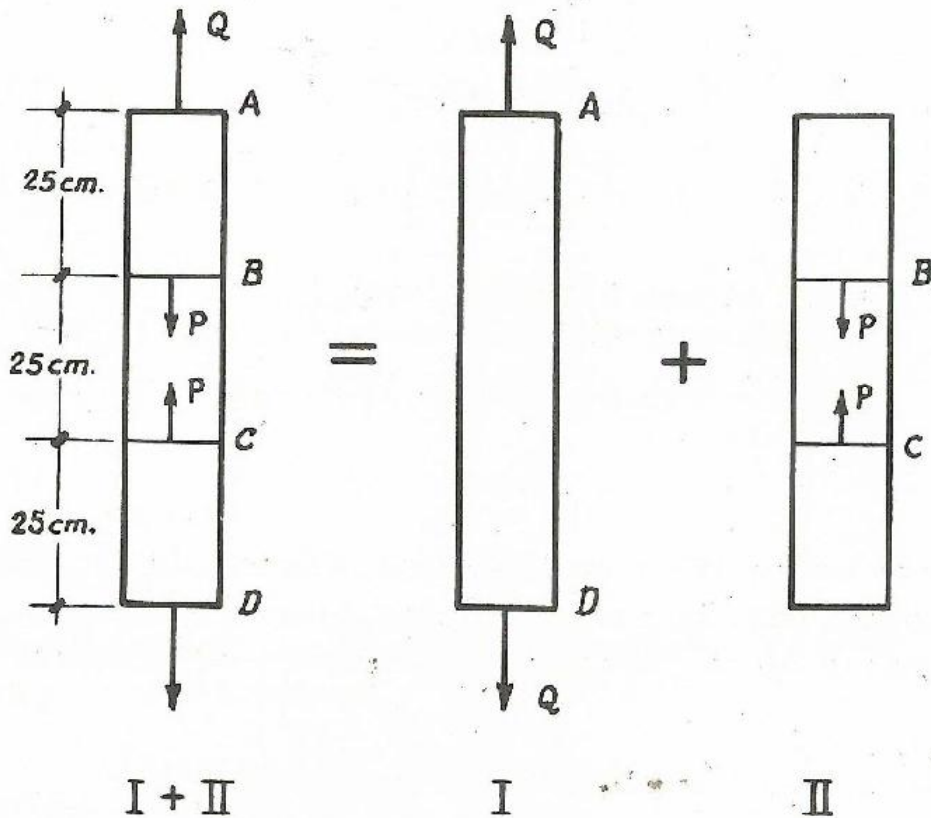
-o-

39. Determinar el alargamiento total de la barra AB cuya sección recta es de 6 cm² y que está sometida a la acción de las fuerzas Q = 5.000 Kg.; P = 2.500 Kg. Módulo de elasticidad E = 2.10⁶ Kg/cm².

Aplicando el principio de superposición de efectos podemos

descomponer el estado de cargas inicial en suma de los dos estados simples I y II, con lo cual la deformación final de la pieza será la suma de las dos deformaciones parciales.

$$\delta_{I+II} = \delta_I + \delta_{II}$$



δ_I es un alargamiento de valor:

$$\delta_I = \frac{Q \cdot l}{E \Omega} = \frac{5.000 \cdot 75}{2 \cdot 10^6 \cdot 6} = \frac{375}{12} \cdot 10^{-3} = 0,03120 \text{ cms.}$$

δ_{II} es un acortamiento de valor:

$$\delta_{II} = \frac{P \cdot l'}{E \Omega} = \frac{2.500 \cdot 25}{2 \cdot 10^6 \cdot 6} = \frac{625}{12} \cdot 10^{-4} = 0,00520 \text{ cms.}$$

La deformación total será un alargamiento de valor:

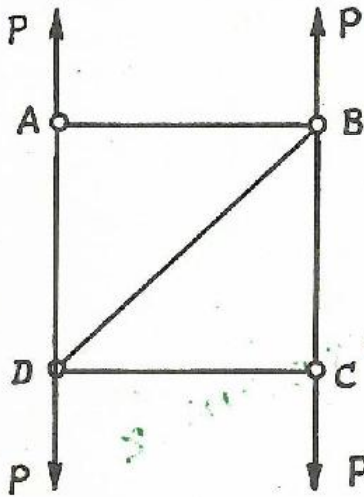
$$\delta_{I+II} = 0,03120 - 0,00520 = 0,026 \text{ cms.}$$

4º. La estructura triangulada ABCD está formada por 5 barras de acero de 6 cm^2 de sección recta y sometida a la acción de las fuerzas $P = 5.000 \text{ Kg}$. $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

Determinar la variación de los ángulos en A y en C.

Las barras AB y CD no trabajan; basta para verlo establecer el equilibrio del nudo A y C.

Como estas barras no trabajan, tampoco trabaja BD; sabiendo que no trabajan AB y CD, basta considerar el equilibrio de los nudos B y D.



En definitiva, quedan las barras AD y la BC sometidas a una tracción de 5.000 Kg . -

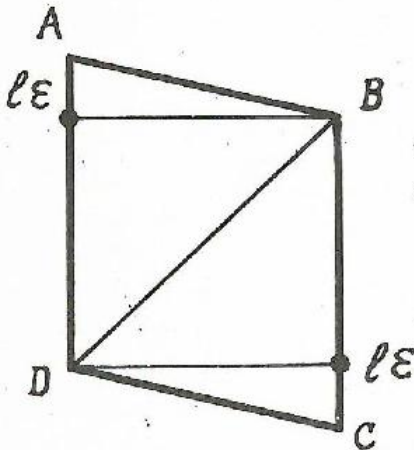
Luego los alargamientos son:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{5000}{2 \times 10^6} = \frac{1}{2.400}$$

alargamiento total = $l \cdot \epsilon$ y el ángulo, que se confunde con la tangente por ser muy pequeña:

$$\text{tag } \alpha = \alpha = \frac{l \cdot \epsilon}{l} = \frac{1}{2.400} \text{ fradián}$$

esta es la disminución que sufre el ángulo recto de A y C.



-0-

5º. Determinar las situaciones de las secciones rectas de la viga de madera BC y de la barra de acero AB de la estructura adjunta, sometida a una carga vertical en el punto B de 3.000 Kgs . ; si la tensión de trabajo para la madera se toma de 10 Kg/cm^2 y para el acero de 800 Kg/cm^2 .

Determinar asimismo las componentes vertical y horizon-

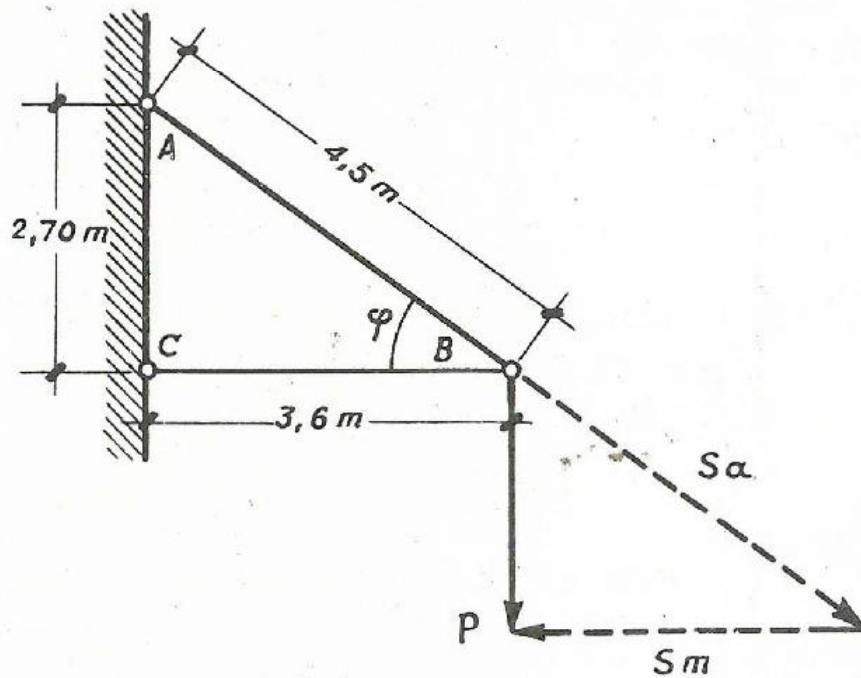
tal del desplazamiento del punto B. debido a la deformación de las barras. Tómese $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$; $E_m = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$.

Descomponiendo la fuerza P en las dos direcciones obtenemos:

$$\frac{S_a}{4,5} = \frac{S_m}{3,6} = \frac{P}{2,7}$$

$$S_a = \frac{4,5}{2,7} P = \frac{4,5}{2,7} \cdot 3.000 = 5.000 \text{ Kg.}$$

$$S_m = \frac{3,6}{2,7} P = \frac{3,6}{2,7} \cdot 3.000 = 4.000 \text{ Kg.}$$



La barra AB está sometida a un esfuerzo de tracción de 5000 Kg. y la viga CB a uno de compresión de 4.000 Kg.

Las secciones rectas, valdrán, pues:

$$\Omega_a = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{5.000}{800} = 6,25 \text{ cm}^2.$$

$$\Omega_m = \frac{S_m}{\sigma_m} = \frac{4.000}{10} = 400 \text{ cm}^2.$$

Como consecuencia del esfuerzo S_a la barra AB experimenta un alargamiento.

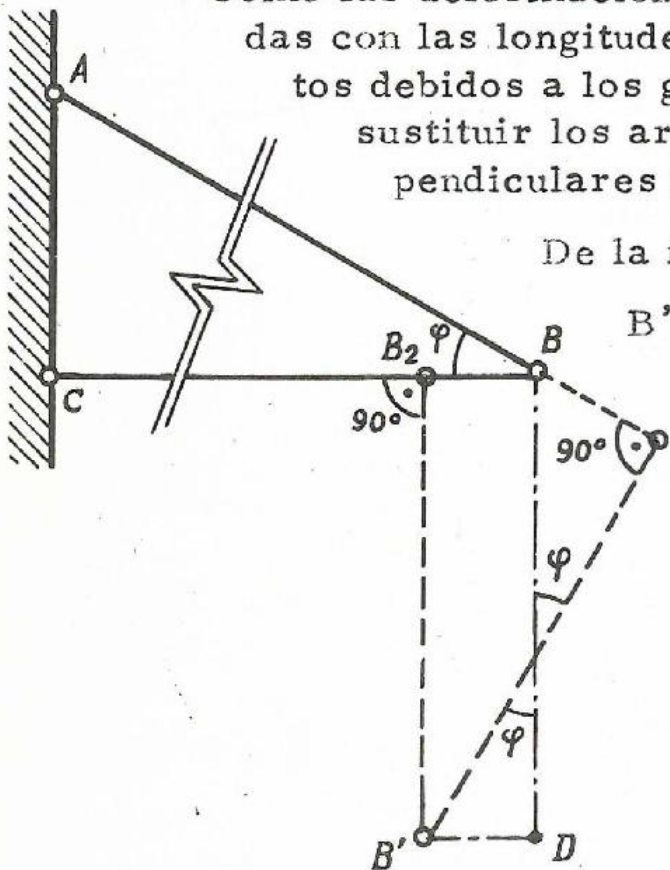
$$BB_1 = \frac{\sigma_a \cdot l_a}{E_a} = \frac{800 \cdot 450}{2 \cdot 10^6} = 0,18 \text{ cms.}$$

La viga CB sometida al esfuerzo S_m experimenta un acortamiento.

$$BB_2 = \frac{\sigma_m \cdot l_m}{E_m} = \frac{10,360}{10^5} = 0,036 \text{ cms.}$$

Si ambas piezas se deformaran sin cambiar su dirección, los puntos B_1 y B_2 no coincidirían en uno; como ello es necesario para establecer la continuidad de la estructura, las piezas giran en sus articulaciones A y C.

Como las deformaciones son muy pequeñas comparadas con las longitudes de las barras, los corrimientos debidos a los giros también lo son y podemos sustituir los arcos de circunferencia por perpendiculares a las direcciones de las barras.



De la figura obtenemos entonces:

B' posición final del punto B.

Corrimiento horizontal.

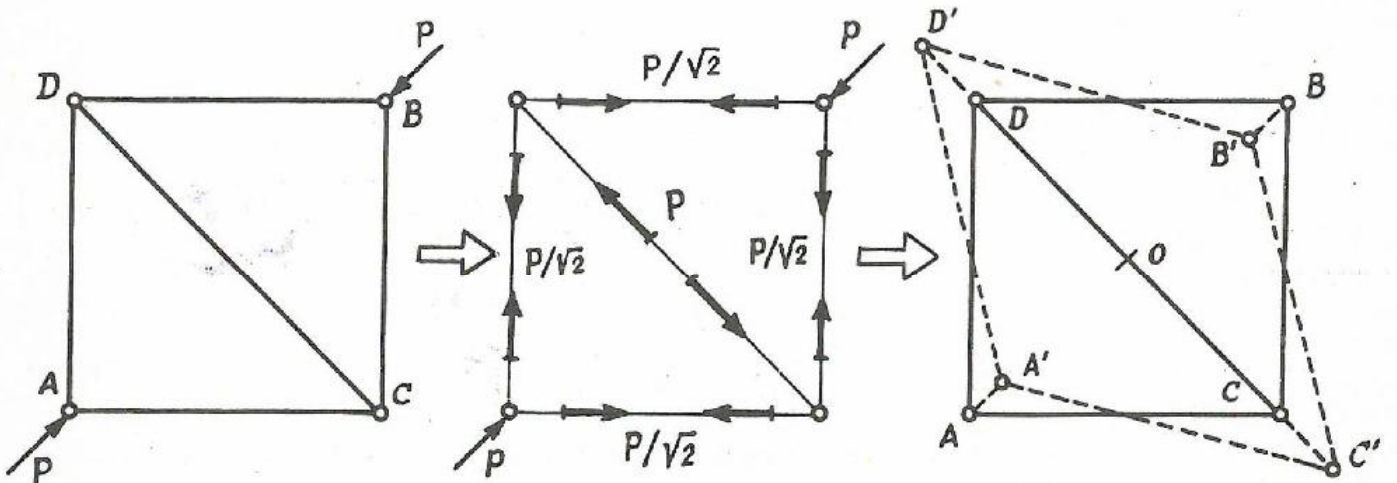
$$B'D = B_2B = 0,036 \text{ cms.}$$

Corrimiento vertical.

$$BD = \frac{BB_1}{\text{sen } \varphi} + \frac{B'D}{\text{tg } \varphi} = \frac{0,18 \cdot 4,5}{2,7} + \frac{0,036 \cdot 3,6}{2,7} = 0,348 \text{ cms.}$$

69. El sistema articulado de barras adjunto que forma un cuadrado de lado l está sometido a las fuerzas P que actúan según una diagonal. Las secciones de las barras son iguales.

Determinar la aproximación que experimentan los puntos A y B.



Las barras laterales están a compresión de $\frac{P}{\sqrt{2}}$
 Su comportamiento vale:

$$\delta_l = -\frac{\frac{P}{\sqrt{2}} \cdot l}{E \cdot \Omega} = -\frac{P \cdot l}{\sqrt{2} \cdot E \cdot \Omega}$$

El alargamiento unitario es

$$\epsilon_l = -\frac{P}{\sqrt{2} \cdot E \cdot \Omega}$$

La longitud final es: $l(1 + \epsilon_l)$

La diagonal está a tracción de P.

Su alargamiento vale:

$$\delta_d = \frac{P \cdot l \sqrt{2}}{E \cdot \Omega}$$

Su alargamiento univario vale:

$$\epsilon_d = \frac{P}{E \cdot \Omega}$$

Su longitud final es: $l \sqrt{2} (1 + \epsilon_d)$.

Entonces tenemos que $\overline{OB'}^2 = \overline{B'C'}^2 - \overline{OC'}^2$

$$\overline{B'C'}^2 = l^2 (1 + \epsilon_l)^2 = l^2 (1 + 2\epsilon_l + \epsilon_l^2)$$

$$\overline{OC'}^2 = \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1 + \epsilon_d)^2 = \frac{l^2}{2} (1 + 2\epsilon_d + \epsilon_d^2)$$

Despreciando los cuadrados de los alargamientos unitarios,

$$\overline{OB'}^2 = l^2 (1 + 2\epsilon_l) - \frac{l^2}{2} (1 + 2\epsilon_d) = \frac{l^2}{2} + 2l^2 \left(\epsilon_l - \frac{\epsilon_d}{2}\right) =$$

$$= \frac{l^2}{2} + 2 l^2 \left[\frac{P}{\sqrt{2} E \Omega} - \frac{P}{2 E \Omega} \right] = \frac{l^2}{2} - \frac{P l^2}{E \Omega} (\sqrt{2} + 1)$$

Entonces el acercamiento entre A y B será:

$$\delta = 2(\overline{OB} - \overline{OB'}) = 2 \left[\frac{l}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{P l^2}{E \Omega} (\sqrt{2} + 1)} \right] = l \sqrt{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2P}{E \Omega} (\sqrt{2} + 1)} \right]$$

Llamando $x = \frac{2P}{E \cdot \Omega} (\sqrt{2} + 1)$

$$\delta = l \sqrt{2} [1 - \sqrt{1 - x}]$$

Desarrollando en serie $\sqrt{1-x}$ y tomando solo los dos primeros términos:

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2} x \dots$, nos queda:

$$\delta = l \sqrt{2} [1 - (1 - \frac{1}{2} x)] = l \sqrt{2} [1 - 1 + \frac{1}{2} x] = \frac{1}{2} l \sqrt{2} x.$$

Sustituyendo x por su valor:

$$\delta = \frac{1}{2} l \sqrt{2} \cdot \frac{2 P}{E \cdot \Omega} (\sqrt{2} + 1) = \underline{\underline{\frac{P l}{E \cdot \Omega} (2 + \sqrt{2})}}$$

-o-

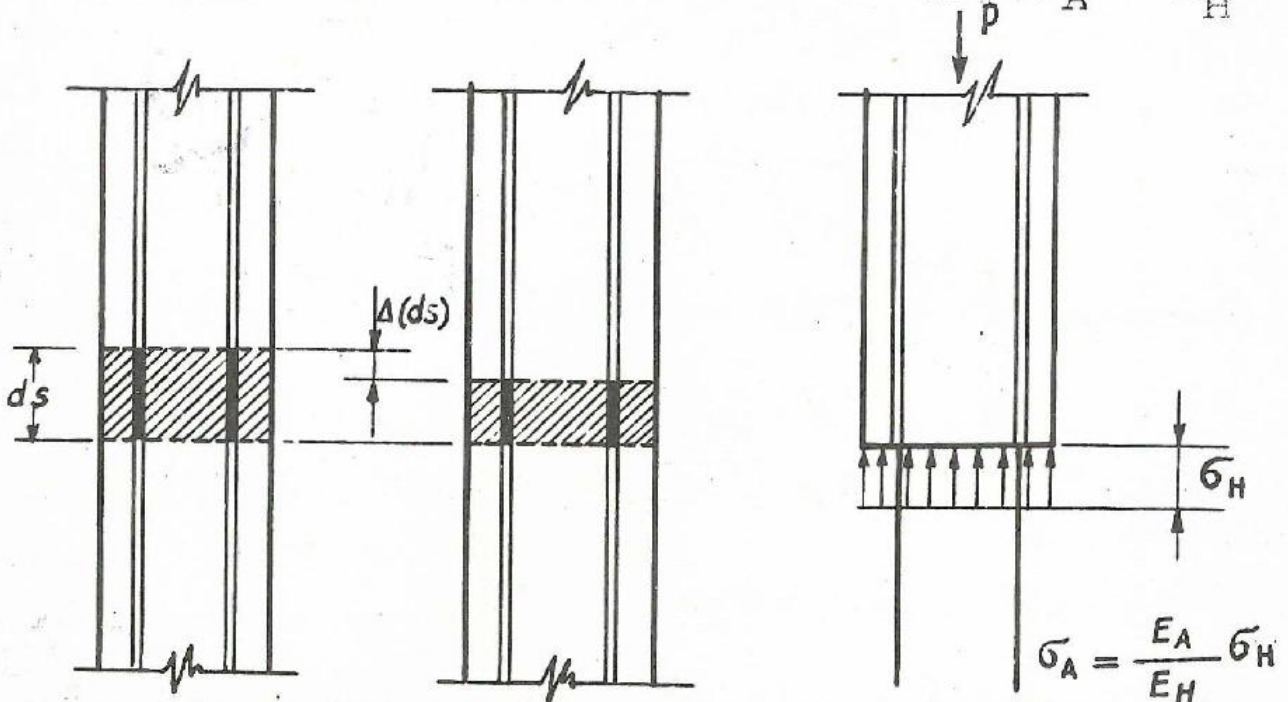
7º. Una columna de hormigón armado está comprimida por una fuerza $P = 50.000$ Kg. Calcular la parte de carga resistida por el hormigón y la resistida por el acero, sabiendo que la sección recta de hormigón es 10 veces superior a la del acero y que el módulo de elasticidad del acero es 15 veces mayor que la del hormigón. No se considera el peso propio.

Las deformaciones producidas al entrar en carga la columna de hormigón armado, se realizan sin deslizamiento entre las armaduras y el hormigón; considerando por tanto una rebanada de espesor ds tanto su acero como su hormigón experimentan la misma deformación $\Delta(ds)$ y tienen en consecuencia la misma deformación unitaria

$$\epsilon_A = \epsilon_H$$

Como ambos materiales son hookianos

$$\sigma_A = E_A \varepsilon_A ; \sigma_H = E_H \varepsilon_H \text{ y por tanto } \varepsilon_A = \varepsilon_H = \frac{\sigma_A}{E_A} = \frac{\sigma_H}{E_H}$$



La resultante de las tensiones actuantes sobre el acero es $\sigma_A \Omega_A$ y sobre el hormigón $\sigma_H \Omega_H$.

Estableciendo el equilibrio de un trozo de pieza, tenemos:

$$\sigma_A \Omega_A + \sigma_H \Omega_H = P.$$

Como sabemos que $\Omega_H = 10 \Omega_A$, $\sigma_H = \frac{E_H}{E_A} \sigma_A = \frac{\sigma_A}{15}$ sustituyendo, obtenemos:

$$\sigma_A \Omega_A + \frac{10}{15} \sigma_A \Omega_A = P ; \sigma_A \Omega_A = \frac{3P}{5} = \frac{3.50.000}{5} = 30.000 \text{ Kg.}$$

que es la carga resistida por el acero; la resistida por el hormigón será:

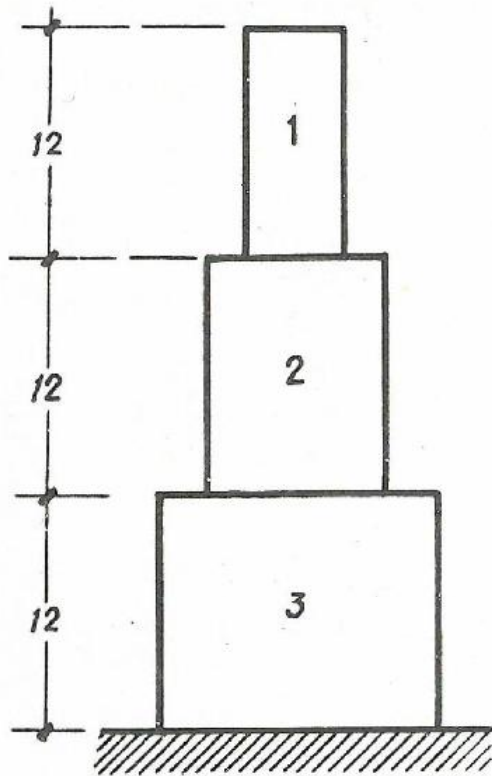
$$\sigma_H \Omega_H = \frac{10}{15} \sigma_A \Omega_A = 20.000 \text{ Kg.}$$

-o-

8º. Una pila de puente formada por tres prismáticos de igual longitud, está sometida en su extremo superior a una fuerza de 3.000 Kgs.

Determinar el volumen de la fábrica si la altura del pilar son 36 mts. el peso de 2.000 Kg/m³ y la fatiga de compresión

máxima admisible 10 Kg/cm^2 .



Estableciendo el equilibrio del pilar (1) tenemos:

carga + peso = tensión admisible - por el área de la sección.

$$300.000 + S_1 \gamma \cdot 12 = \sigma_t \cdot S_1$$

$$300.000 = S_1 (\sigma_t - 12 \gamma) \rightarrow S_1 = \frac{300.000}{\sigma_t - 12 \gamma} =$$

$$= \frac{300.000}{10 \cdot 10^4 - 12 \cdot 2 \cdot 10^3} = \underline{\underline{4 \text{ m}^2}}$$

Peso de este pilar: $P_1 = 4 \cdot 12 \cdot 2.000 = 96.000 \text{ Kg.}$

Análogamente:

$$S_2 = \frac{300.000 + 96.000}{10 \cdot 10^4 - 12 \cdot 2 \cdot 10^3} = 5,2 \text{ m}^2.$$

$$P_2 = 5,2 \cdot 12 \cdot 2000 = 124.800.$$

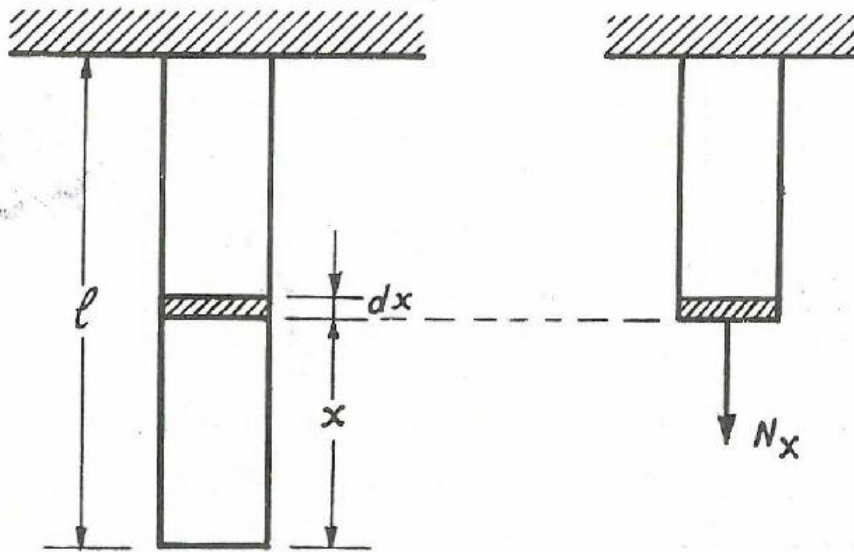
$$P_1 + P_2 = 124.800 + 96.000 = 220.800.$$

$$S_3 = \frac{300.000 + 220.800}{10 \cdot 10^4 - 12 \cdot 2 \cdot 10^3} = 6,9 \text{ m}^2.$$

$$V = h (S_1 + S_2 + S_3) = 12 (4 + 5,2 + 6,9) = \underline{\underline{194 \text{ m}^3}}$$

-o-

9. Determinar el aumento total de longitud de una barra de sección constante dispuesta verticalmente empotrada en su parte superior y sometida exclusivamente a la acción de su peso.



Una rebanada de espesor dx se encuentra sometida a un esfuerzo de tracción N_x igual al peso de la parte de barra situada por debajo de ella.

$$N_x = x \cdot \Omega \cdot \gamma \quad (\gamma = \text{peso específico})$$

El alargamiento unitario es

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \Omega} = \frac{\Delta(dx)}{dx}$$

El alargamiento de la rebanada diferencial será, por tanto,

$$\Delta(dx) = \frac{N_x dx}{E \Omega} = x \Omega \gamma \frac{dx}{E \Omega} = \frac{\gamma}{E} x dx.$$

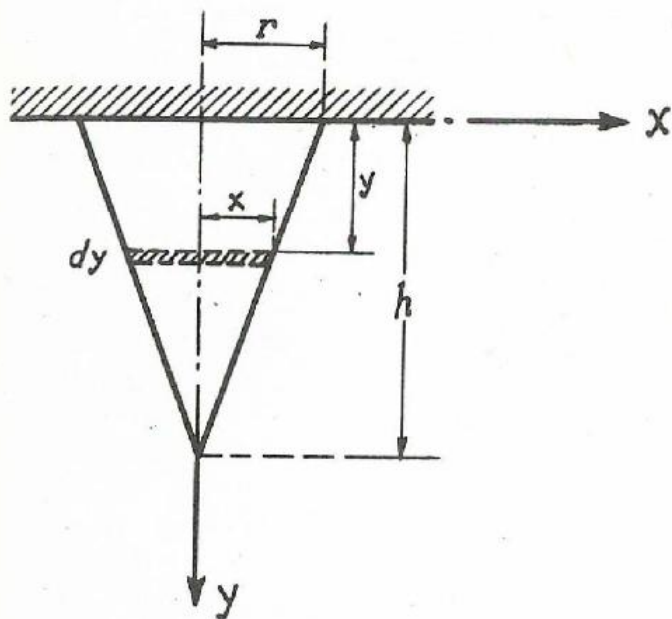
El alargamiento total de la barra será:

$$\Delta_t = \int_0^l \Delta(dx) = \int_0^l \frac{\gamma}{E} x dx = \frac{\gamma l^2}{2 E}$$

-o-

10. Determinar el desplazamiento del vértice de un cono suspendido por su base y sometido a la acción de su propio peso.

Cogemos una rebanada a una distancia y de la base.



Sobre la cara de dicha rebanada actúa un peso igual al del cono que queda separado en la parte inferior:

$$P = \frac{1}{3} \pi x^2 (h-y) \gamma$$

el alargamiento unitario es:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{E \cdot \Omega}$$

El alargamiento de la rebanada diferencial, será:

$$\Delta(dy) = \frac{P dy}{E \Omega}$$

El desplazamiento del vértice, será:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^h \frac{P dy}{E \Omega} = \int_0^h \frac{\frac{1}{3} \pi x^2 (h-y) \gamma}{E \pi x^2} dy = \int_0^h \frac{\gamma}{3E} (h-y) dy = \\ &= - \frac{\gamma}{3E} \left[\frac{(h-y)^2}{2} \right]_0^h = \frac{\gamma h^2}{6E} \end{aligned}$$

-o-

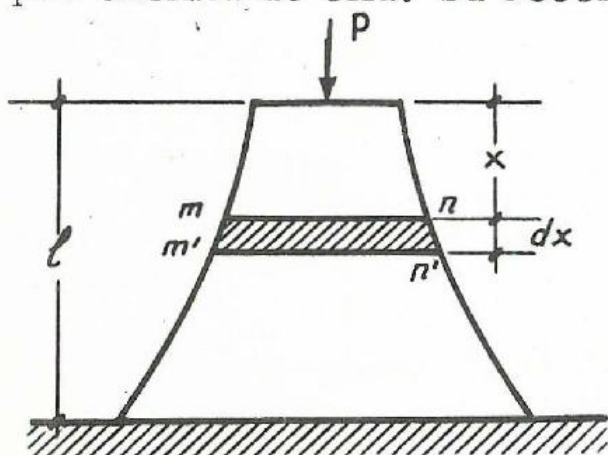
11. Determinar la forma del pilar de la figura, de modo que las tensiones en cada sección sean constantes (sólido de igual resistencia).

Sobre la sección mn, actúa la carga P, y el peso del sólido por encima de ella. Su sección es S_x . Luego la carga será

$$\sigma_t S_x,$$

siendo σ_t la tensión c^{te} para cada sección.

Sobre la tensión m'n' distanciada dx de mn, actuará la misma carga más el peso de la rebanada dx, o sea $\Delta \cdot \gamma \cdot dx$, y el área



será $S_x + \Delta x$. El incremento de peso ha de dar sobre el incremento de área una tensión σ_t , expresándolo

$$dS_x \sigma_t = S_x \gamma dx \rightarrow \frac{dS_x}{S_x} = \frac{\gamma}{\sigma_t} dx \rightarrow \text{integrando}$$

$$\log S_x = \frac{\gamma x}{\sigma_t} + \log C \rightarrow \Delta = C e^{\frac{\gamma x}{\sigma_t}}$$

para determinar C, tenemos que para $x = 0$, $c = \frac{P}{\sigma_t}$, luego:

$$S_x = \frac{P}{\sigma_t} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_t}}$$

-o-

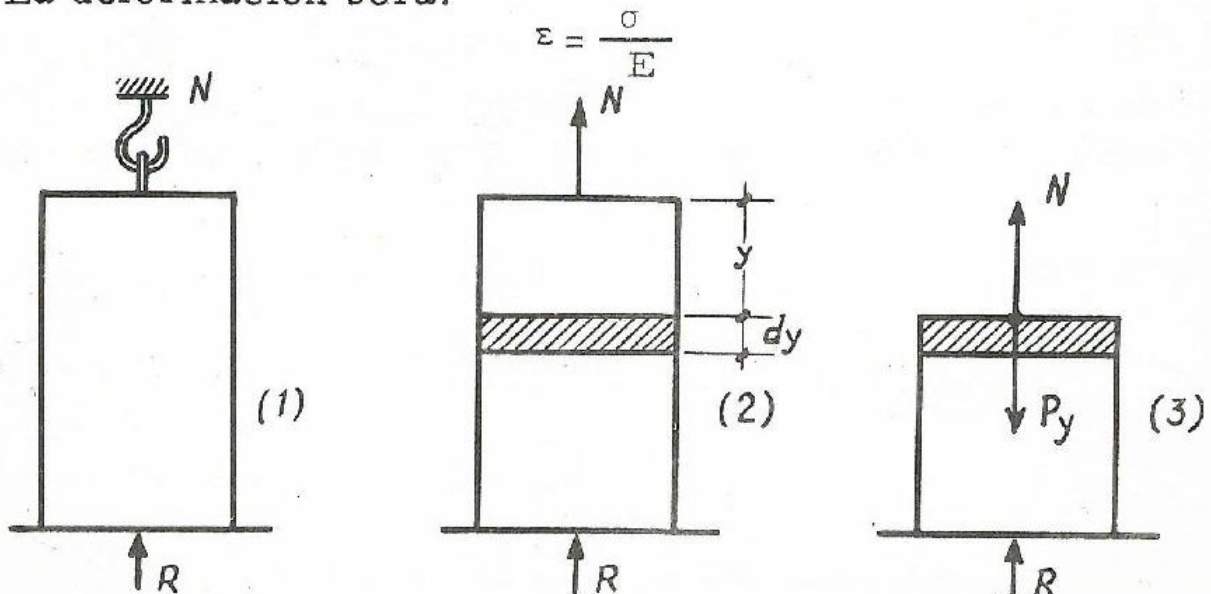
12. Un pilar rectangular cuelga de un gancho por su parte superior y está apoyado en el plano horizontal. El peso del pilar es 1.200 Kg.

Calcular la reacción del gancho y del plano sabiendo que el pilar no experimenta ni alargamiento ni acortamiento, es decir, su longitud es invariable.

Sustituimos la acción del gancho por un esfuerzo axial N.

Consideramos una rebanada de longitud dy a una distancia y del borde superior y vamos a establecer su deformación.

La deformación será:



$$\sigma = \frac{N-P}{\Omega} y = \frac{N-\Omega \cdot \gamma \cdot y}{\Omega} = \frac{N}{\Omega} - \gamma y \quad \text{" luego } \varepsilon = \frac{N}{E \Omega} - \frac{\gamma y}{E} \quad \text{"}$$

y el atiramiento total del elemento dy será:

$$\varepsilon dy = \left[\frac{N}{E \Omega} - \frac{\gamma y}{E} \right] dy$$

La deformación total será la integral de "0" a "l".

luego,

$$\int_0^l \varepsilon dy = \int_0^l \left(\frac{N}{E \Omega} - \frac{\gamma y}{E} \right) dy = \left[\frac{N}{E \Omega} y - \frac{\gamma y^2}{2E} \right]_0^l = \frac{N l}{E \Omega} - \frac{\gamma l^2}{2E} = 0$$

ya que el alargamiento total es nulo. Luego:

$$\frac{N}{\Omega} = \frac{\gamma l}{2} \quad \text{" } N = \frac{\gamma \Omega l}{2} = \frac{P}{2} = 600 \text{ Kgs.}$$

y como de la condición de equilibrio del sólido.

$$N - P + R = 0 \rightarrow R = N = \frac{P}{2} = 600 \text{ kgs.}$$

-o-

2-1. - FLEXION PURA. - 2-2. - FLEXION SIMPLE. - 2-3. - FLEXION COMPUESTA.

2-1. FLEXION PURA. - Se dice que una rebanada está sometida a flexión pura cuando cada cara está solicitada por un sistema de fuerzas equivalente a un par actuando en un plano que contiene a la directriz de la pieza.

En el caso en que dicho plano contenga a uno de los ejes principales de inercia de la sección (si es simétrico uno de los de simetría), las tensiones normales vienen dadas por la fórmula:

$$\sigma_y = \frac{M_f \cdot y}{I}$$

siendo:

M_f = momento flector,

I = momento de inercia de la sección respecto a la fibra neutra.

y = distancia de la fibra neutra.

σ_y = tensión en un punto que dista "y" de la fibra neutra.

La fibra neutra es el lugar geométrico de los puntos de tensión nula, que en el caso de flexión pura, coincide con la perpendicular al eje principal de inercia por el centro de gravedad.

Es habitual considerar las tracciones positivas; las compresiones, negativas y momento flector positivo aquél que produce compresiones en las fibras superiores a la neutra, según este criterio para la aplicación correcta de la fórmula hemos de tomar el eje positivo hacia abajo.

Según indica la figura la tensión máxima se produce en la fibra más alejada, siendo por tanto su valor :

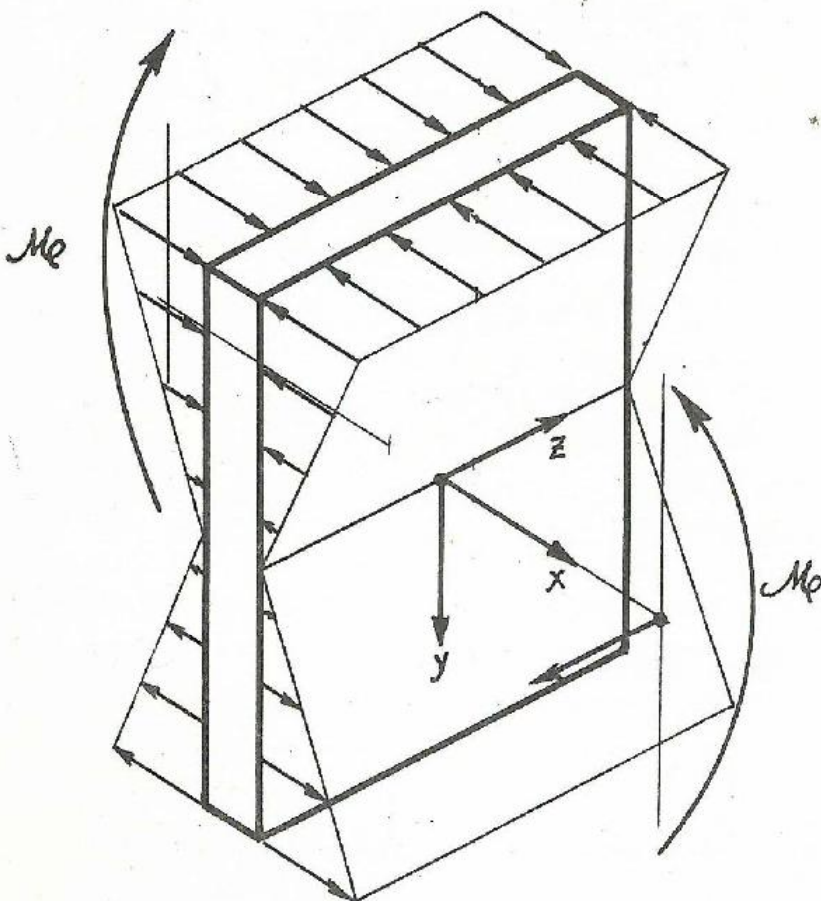
$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{M_f \cdot y_{\text{max.}}}{I}$$

Esta expresión puede ponerse en la forma:

$$R = \frac{M_f}{\sigma_{\text{máx.}}} = \frac{I}{y_{\text{max.}}}$$

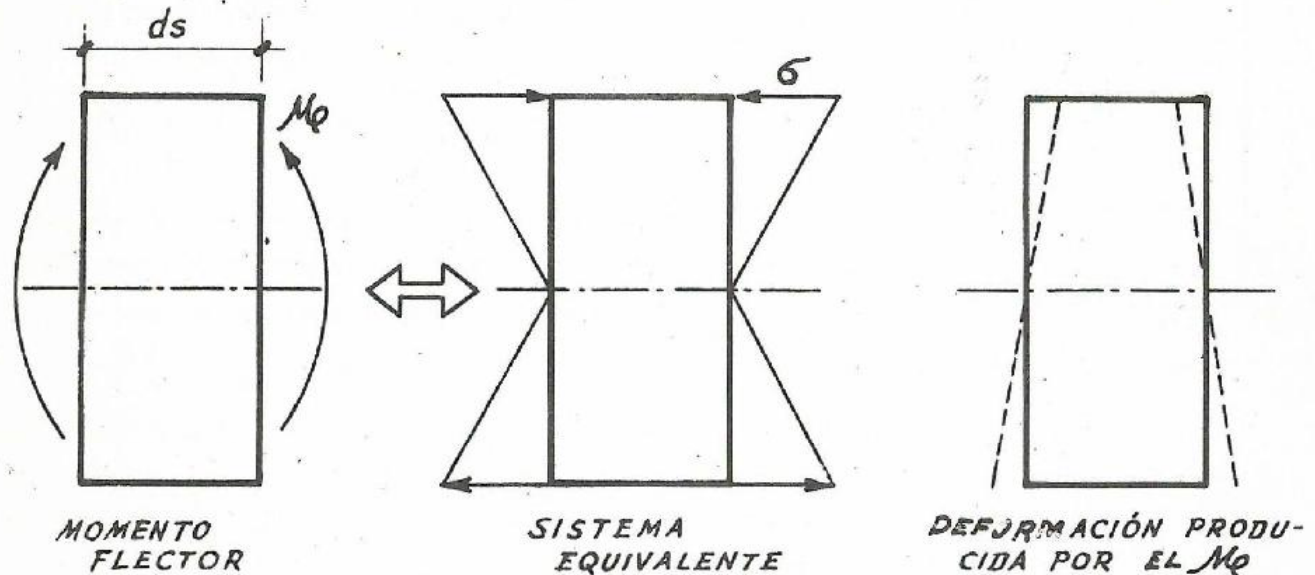
R , se denomina módulo resistente y se encuentra tabulado en los catálogos de productos laminados.

Conociendo el M_f y la $\sigma_{\text{máx.}}$ admisible del material, podemos determinar



el valor de R y mediante el catálogo dimensionar el perfil resistente más adecuado.

En las siguientes figuras están representadas esquemáticamente las tensiones y deformaciones producidas por M_f .



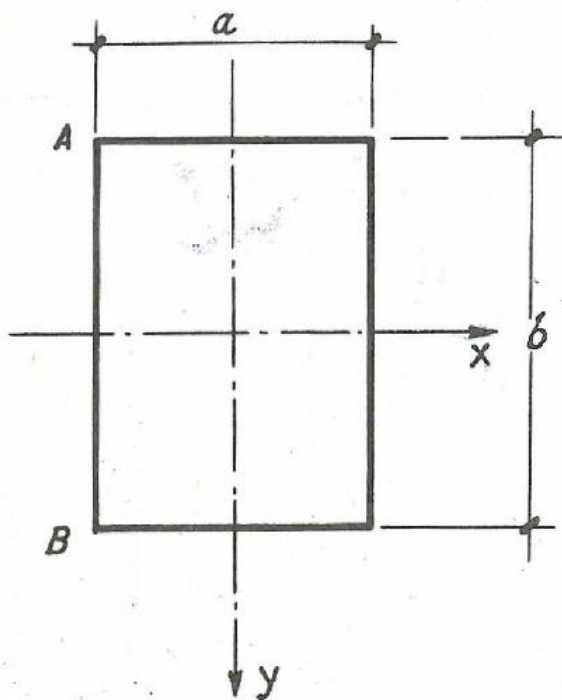
Cuando el plano en que actúa el M_f no contiene a uno de los ejes principales de inercia la flexión se denomina "ESVIADA"; en cuyo caso descomponiendo dicho momento en las dos direcciones principales de inercia y aplicando el principio de superposición de efectos podemos determinar la tensión en cualquier punto de la sección.

Debe notarse que a cada dirección principal de inercia le corresponde un momento de inercia distinto.

En este caso la fibra no es perpendicular o la fibra neutra no es normal al plano de actuación del momento, correspondiéndole la dirección conjugada de la traza de este plano con la sección, en la elipse principal de inercia.

EJERCICIOS:

1. Una sección rectangular cuyo canto es el doble del ancho, - esta sometida a una flexión pura de 10 m. T actuando en un plano de simetría. Siendo la resistencia admisible del ma-



material a tracción y a compresión de 60 Kg/cm^2 , calcular las dimensiones óptimas de la sección.

La distribución de tensiones normales viene dada por la fórmula:

$$\sigma = \frac{M_f \cdot y}{I}$$

Las tensiones máximas se producen en A (compresión) y en B (tracción) siendo iguales y de valor:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_B = -\sigma_A = \frac{M_f \cdot b}{2 \cdot I}$$

La sección estará bien dimensionada cuando la tensión máxima sea igual a la admisible.

$$\sigma_{\text{máx.}} = \sigma_{\text{adm.}} = 60 = \frac{10 \cdot 10^5 b}{2 I}$$

Como $I = \frac{I}{12} ab^3$, sustituyendo, tenemos:

$$60 \frac{1}{6} ab^3 = 10^6 \cdot b$$

$$ab^2 = 10^5$$

Como $b = 2a$

$$4a^3 = 10^5 ; \quad a^3 = 25.000 ; \quad a = 29,2 \text{ cms.}$$

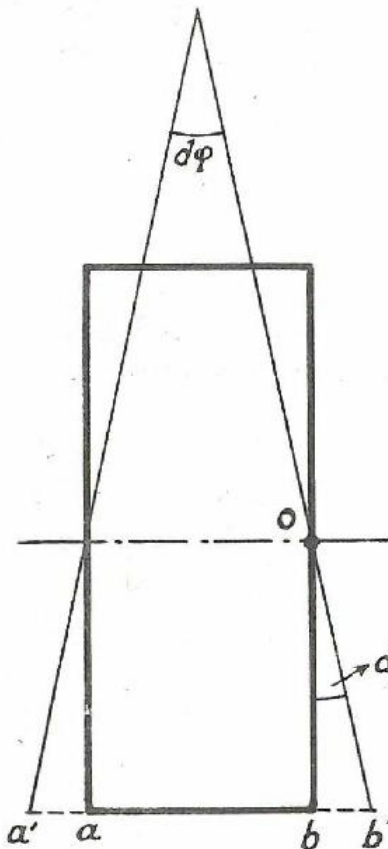
Por tanto,

$$b = 58,4 ; \quad a = 29,2 \text{ cms.}$$

-o-

2. Determinar la deformación angular que experimentan las caras de una rebanada sometida a flexión pura.

$$\text{tag} \left(\frac{d\varphi}{2} \right) = \frac{bb'}{Ob} = \frac{2bb'}{2Ob} = \frac{bb' + aa'}{2 Ob} \quad (1)$$



Como $aa' = bb'$ por simetría.

$bb' + aa' \rightarrow$ es la deformación del elemento ds , luego:

$$aa' + bb' = \varepsilon ds.$$

Sustituyendo en (1)

$$\text{tag} \left(\frac{d\varphi}{2} \right) \approx \frac{d\varphi}{2} = \frac{\varepsilon ds}{2Ob} ;$$

$$d\varphi = \frac{\varepsilon ds}{Ob} \quad (2)$$

De la ley de Hooke: $E\varepsilon = \sigma$, y como

$$\sigma = \frac{M Ob}{I} \quad \text{" tenemos:}$$

$$E\varepsilon = \frac{M Ob}{I} \quad \text{" } \frac{\varepsilon}{Ob} = \frac{M}{EI}$$

Sustituyendo en (2)

$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds \quad ; \quad \text{o bien como } \rho \cdot d\varphi = ds$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Siendo ρ el radio de curvatura.

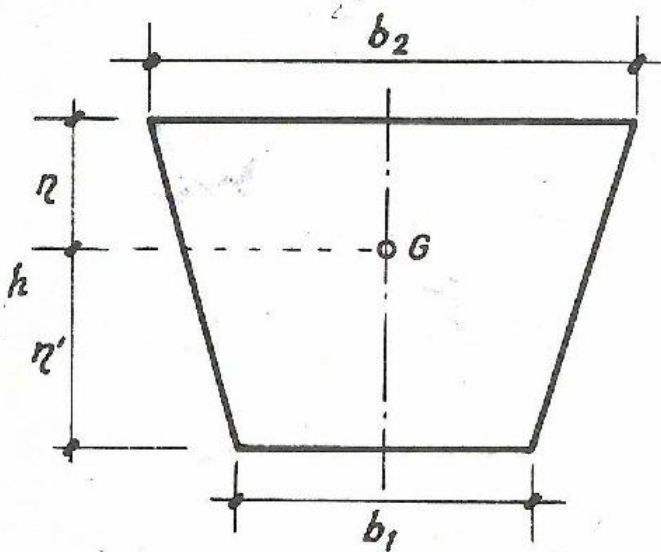
-o-

3. Determinar el máximo M_f que puede resistir una viga de acero cuya sección es un trapecio isósceles de altura h y bases b_1 y b_2 .

$$\sigma_y = \frac{My}{I} \quad \text{" } M = \frac{\sigma_y I}{y} \quad (2)$$

Tenemos que determinar 1º el c. de g. de un trapecio.

$$\eta' = \frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b_2}{b_2 + b_1} \quad \eta = \frac{h}{3} \frac{b_2 + 2b_1}{b_2 + b_1}$$



El momento de inercia de un trapecio isósceles respecto de la fibra neutra es:

$$I_G = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}$$

en nuestro caso

$$I_G = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$$

como la fibra más alejada de la fibra neutra es la base b_1 que se encuentra a

$$\eta' = \frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b_2}{b_2 + b_1}$$

Tenemos que sustituyendo en (1)

$$M = \sigma_{ad} \frac{\frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}}{\frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}} = \sigma_{ad} \frac{h^3}{12} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + 2b_2}$$

σ_{ad} → es la tensión admisible del material.

-0-

4. - Determinar la tensión máxima que se produce en un IPN 40 sometido a un momento flector puro de 3,46 m. T actuando en un plano que forma 30° con el eje del alma.

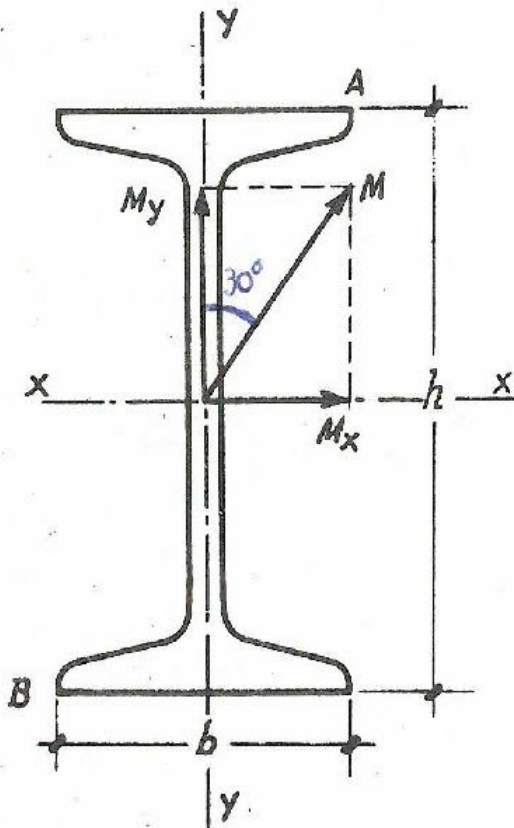
Datos:

$$h = 40 \text{ cm.}$$

$$b = 15,5 \text{ cm.}$$

$$I_x = 29,210 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 1,160 \text{ cm}^4, .$$



Descomponiendo el momento en las direcciones de los ejes principales de inercia tenemos:

$$M_x = M \cdot \sin 30^\circ = \frac{3,46}{2} = 1,73 \text{ m. T} = 1,73 \cdot 10^5 \text{ Kg. cm.}$$

$$M_y = M \cdot \cos 30^\circ = \frac{3,46}{2} \sqrt{3} = 3 \text{ m. T} = 3 \cdot 10^5 \text{ Kg. cm.}$$

El momento M_x origina unas tensiones

$$\sigma_I = - \frac{M_x \cdot x}{I_y}$$

El momento M_y origina unas tensiones

$$\sigma_{II} = - \frac{M_y \cdot y}{I_x}$$

La tensión total en un punto (xy) es

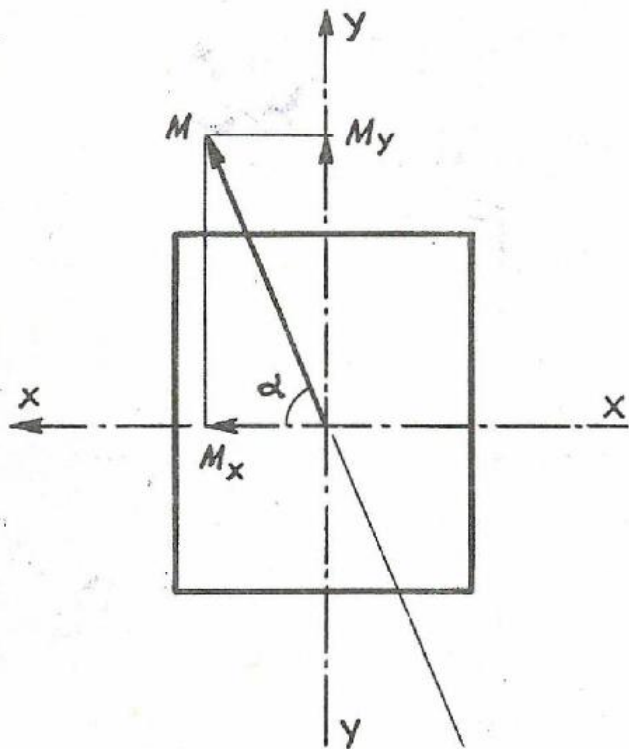
$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = - \left(\frac{M_x \cdot x}{I_y} + \frac{M_y \cdot y}{I_x} \right)$$

Las mayores tensiones se producen en los puntos A y B en los que las coordenadas alcanzan sus valores máximos:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= - \left(\frac{1,73 \cdot 10^5 \cdot 15,5}{2.1160} + \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 20}{29.210} \right) = \\ &= - (1.160 + 206) = - 1.366 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

En el punto B se produce la misma tensión, solamente que en tracción.

5. Determinar la fibra neutra originada por una flexión esviada en una sección rectangular.



Descomponemos el momento en las direcciones de los ejes principales de inercia (ejes de simetría).

$$M_x = M \cdot \cos \alpha$$

$$M_y = M \cdot \sin \alpha$$

Considerando como dirección positiva de los ejes, la señalada en la figura y como tensiones negativas las de compresión, obtenemos las tensiones en un punto de coordenadas (xy) por el principio de superposición de efectos.

Tensión debida a M_x

$$\sigma_I = - \frac{M_x \cdot x}{I_y}$$

Tensión debida a M_y

$$\sigma_{II} = - \frac{M_y \cdot y}{I_x}$$

Tensión absoluta:

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = - \left(\frac{M_x \cdot x}{I_y} + \frac{M_y \cdot y}{I_x} \right)$$

Sustituyendo M_x y M_y por sus valores.

$$\sigma = - M \left(\frac{x \cdot \cos \alpha}{I_y} + \frac{y \cdot \sin \alpha}{I_x} \right)$$

La fibra neutra es el lugar geométrico de los puntos de tensión nula, haciendo pues $\sigma = 0$, tenemos :

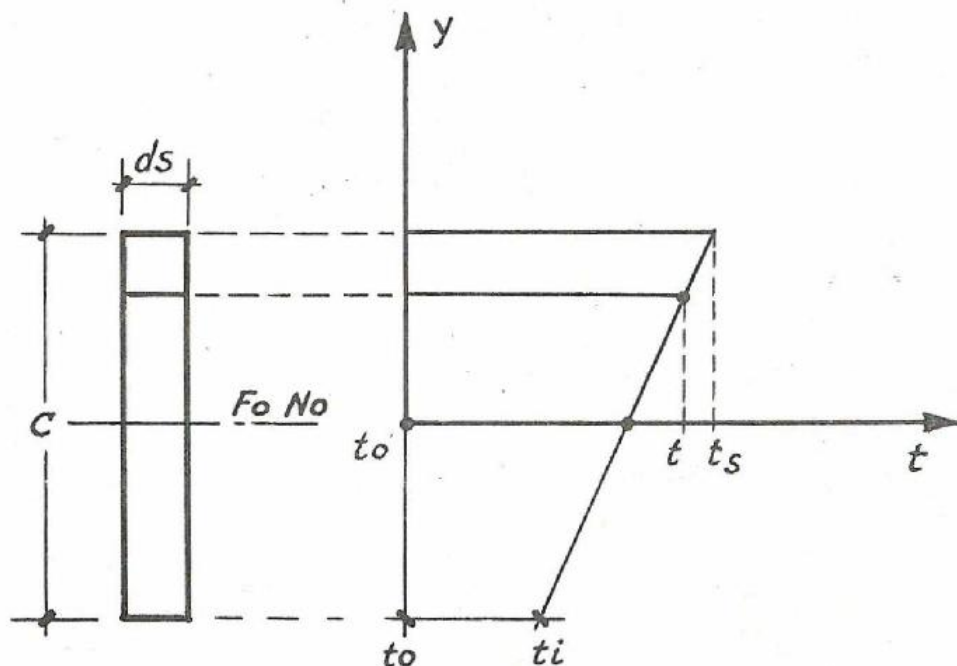
$$\frac{x \cos \alpha}{I_y} + \frac{y \operatorname{sen} \alpha}{I_x} = 0$$

$$y = - \frac{1}{\operatorname{tag} \alpha} \frac{I_x}{I_y} x .$$

Ecuación de la fibra neutra, que no es perpendicular a la traza del plano de actuación del momento, como ya indicamos anteriormente.

-0-

6. - Determinar la deformación de una rebanada inicialmente a t_0 , al someterla a un gradiente lineal de temperatura a lo largo del canto de la sección desde un valor t_i en la cara inferior hasta un valor t_s en la cara superior.



Una fibra a una altura y y sobre la $F_0 N_0$ se encuentra sometido a una temperatura "t", relacionado con "y" según

$$t = +t_G + \frac{t_s - t_i}{c} y$$

El incremento de temperatura que ha sufrido será:

$$t - t_o = t_G + \frac{t_s - t_i}{c} y - t_o$$

Por efecto de dicho aumento de temperatura, la fibra se alarga.

$$\text{Aplicando } \Delta l = l_o (1 + k \Delta t) \rightarrow \Delta l = l_o k \Delta t$$

En nuestro caso

$$\Delta(ds)_y = ds K (\Delta t) = ds \cdot k \left(t_o + \frac{t_s - t_i}{c} y - t_o \right)$$

t_G es la temperatura que le corresponde al centro de gravedad ($F_o N$).

Este resultado puede interpretarse de la siguiente forma:

1º) Un aumento de longitud de todas las fibras de la rebanada de valor:

$$\Delta(ds)_I = ds k (t_G - t_o)$$

En el caso de que el centro de gravedad esté en la mitad del canto

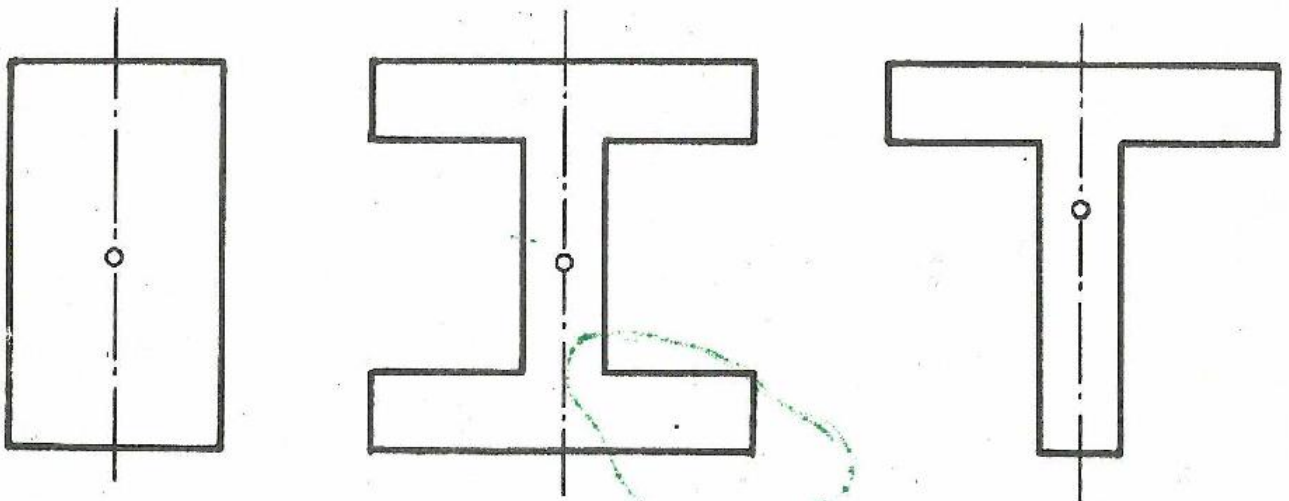
$$t_G = \frac{t_s + t_i}{2}$$

2º) Un giro relativo de las caras de valor.

$$d\varphi = \frac{t_s - t_i}{c} \cdot k ds$$

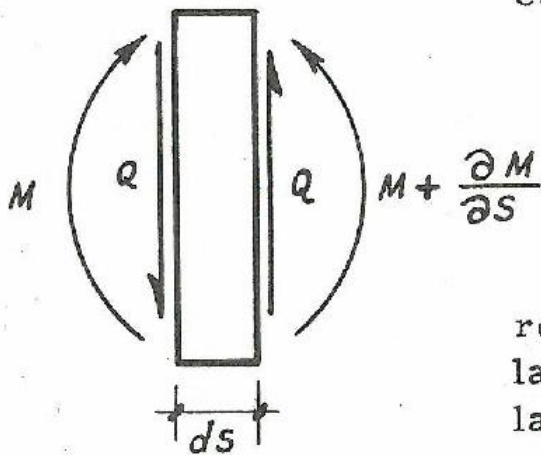
2-2. FLEXION SIMPLE. - Una rebanada está sometida a flexión simple cuando el sistema de fuerzas que actúa en cada cara es equivalente a un momento flector y una fuerza actuando en el plano del Momento y contenida en la cara.

Vamos a considerar solamente piezas simétricas de forma y cargas respecto de un plano que contiene la directriz de la pieza, estando constituida la sección por la unión de rectángulos tal como indican las figuras.



En estas condiciones el M_f , está definido como en el caso de flexión pura, y la fuerza que llamaremos esfuerzo cortante pasa por el centro de gravedad de la sección.

En la figura para que la rebanada - esté en equilibrio.



$$M + \frac{\partial M}{\partial s} - M = - Q ds$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} = - Q \quad (1)$$

De (1) deducimos, que la línea que representa el esfuerzo cortante a lo largo de una pieza, es la derivada de la curva que representa la ley de M_f a lo largo de la misma, y con signo cambiado.

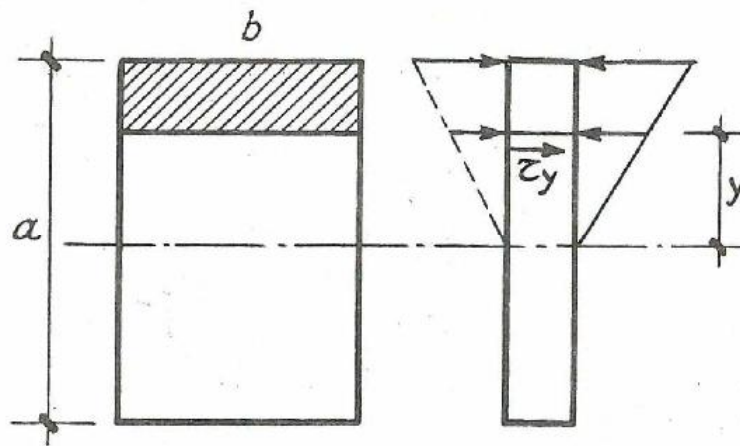
De considerar el equilibrio del trozo obtenido al dar un corte a la rebanada a la distancia "y" de la fibra neutra.

$$\tau_y = \frac{Q m_e}{b_y y}$$

siendo:

τ_y → tensión tangencial en un punto a distancia "y" de la fibra neutra.

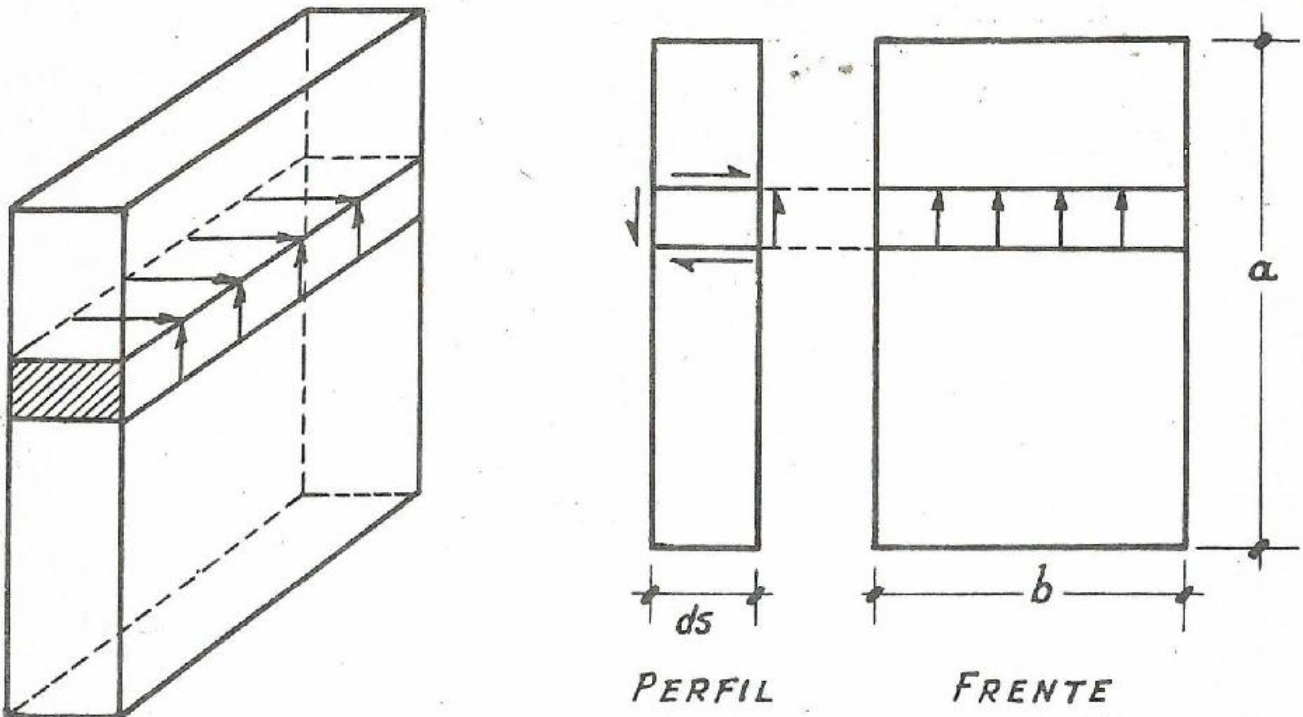
Q → esfuerzo cortante.



M_e → momento estático del área rayada respecto a la fibra neutra.

b → anchura de la sección a la distancia y de la fibra neutra.
 y → distancia a la fibra neutra.

Si damos otro corte a una distancia dy del anterior y estableciésemos el equilibrio del sólido así definido, veríamos que las tensiones tangenciales actúan siempre por pares y que las situadas en en planos perpendiculares tienen el mismo modulo.

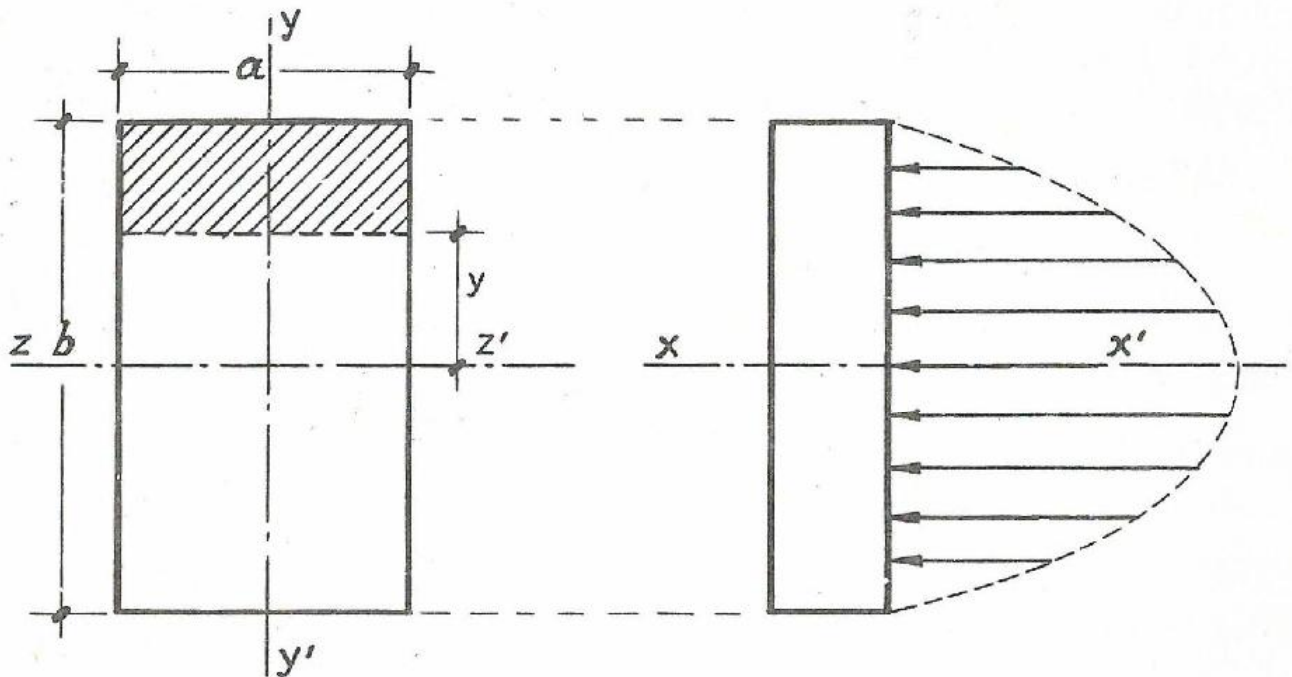


En la resistencia de Materiales la comprobación de secciones sometidas a flexión simple se realiza comprobando independientemente los esfuerzos normales de los tangenciales. --

EJERCICIOS:

Representación gráfica de tensiones cortantes en distintas - secciones simétricas constituidas por elementos rectangulares.

1. Sección rectangular.



Sabemos que

$$\tau_y = \frac{Q M_e}{I a_y}$$

Entonces

$$M_e = \left(\frac{b}{2} - y\right) a \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} + y\right) = \frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)$$

$$I = \frac{1}{12} a b^3$$

Luego:

$$\tau_y = \frac{Q \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)}{\frac{1}{12} a b^3 a} = \frac{3Q(b^2 - 4y^2)}{2 a b^3}$$

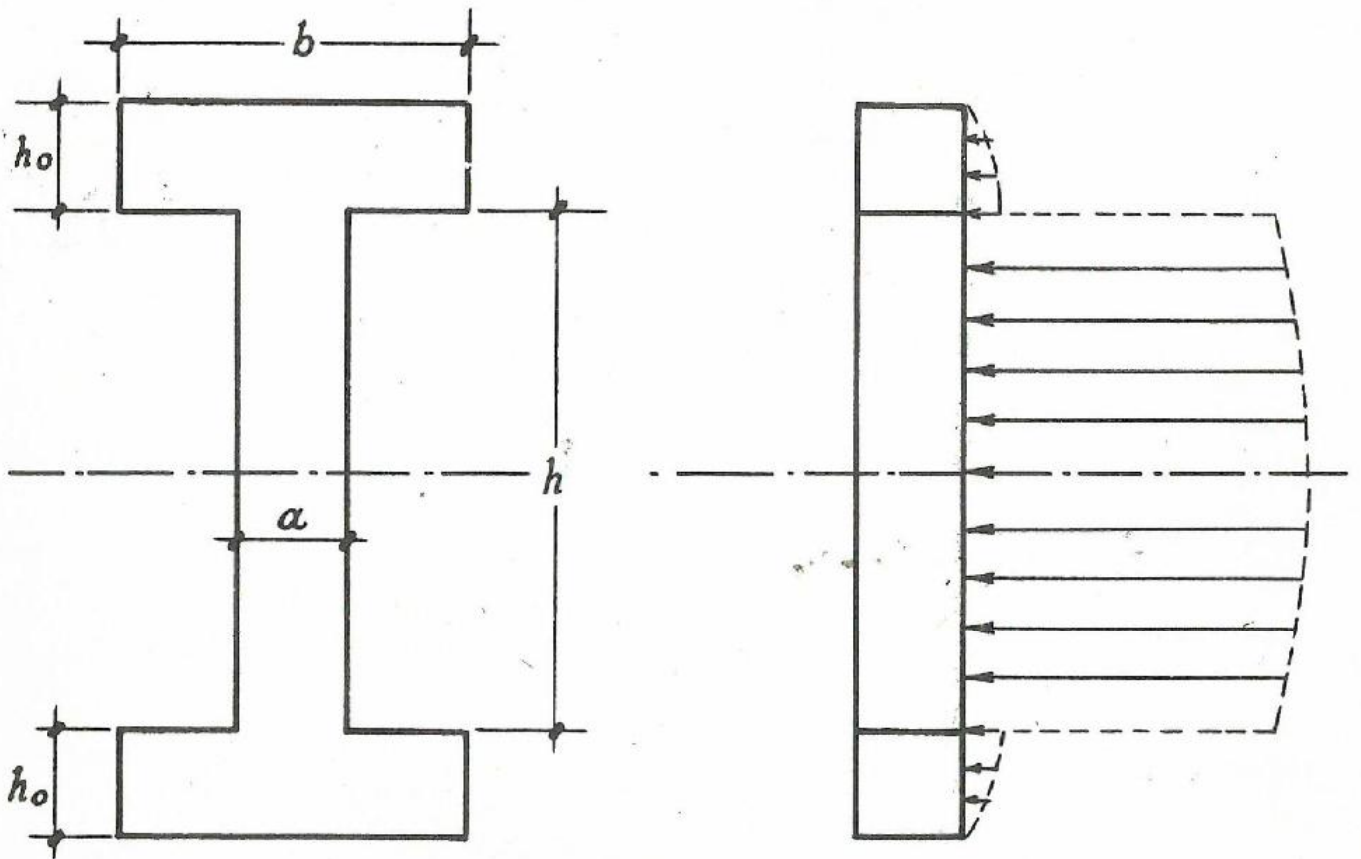
Para $y = \frac{b}{2}$; $\tau_y = 0$

Para $y = 0$; $\tau_y = \frac{3 Q}{2 ab}$.

" $y = -\frac{b}{2}$; $\tau_y = 0$.

La representación de τ se indica en la figura; teniendo en cuenta que el diagrama representa el módulo de la τ pero no la dirección en que actúa que corresponde a la del esfuerzo cortante y está aplicada en la cara de la sección.

2) Sección en doble T.



El momento de inercia vale:

$$I = 2 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_0} by^2 dy + 2 \int_0^{h/2} ay^2 dy = \frac{2}{3} [a(\frac{h}{2})^3 + 3bh_0(\frac{h}{2})^2 + 3bh_0^2\frac{h}{2} + bh_0^3]$$

El momento estático M_e presenta dos leyes:

a) $0 \leq y \leq \frac{h}{2}$.

$$M_e = b h_o \frac{1}{2} (h + h_o) + a \left(\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b h_o}{2} (h + h_o) + \frac{a}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

b) $\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} + h_o$.

$$M_e = b \left(\frac{h}{2} + h_o - y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + h_o + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} + h_o^2 + h_o h y^2\right)$$

Por tanto el esfuerzo cortante presenta dos leyes

a) $0 \leq y \leq \frac{h}{2}$

$$\tau = \frac{Q [b h_o (h + h_o) + a \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)]}{2 a I}$$

Para $y = 0$;

$$\tau = \frac{Q [b h_o (h + h_o) + \frac{a h^2}{4}]}{2 a I}$$

Para $y = \frac{h}{2}$;

$$\tau = \frac{Q b h_o (h + h_o)}{2 a I}$$

b) $\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} + h_o$

$$\tau = \frac{Q b h_o^2 + h_o h + \frac{h^2}{4} - y^2}{2 b I} = \frac{Q (h_o^2 + h_o h + \frac{h^2}{4} - y^2)}{2 I}$$

Para $y = \frac{h}{2}$;

$$\tau = \frac{Q b h_o (h_o + h)}{2 b I} = \frac{Q h_o (h_o + h)}{2 I}$$

Para $y = \frac{h}{2} + h_o$; $\tau = 0$

La mitad inferior es simétrica respecto al eje xx' .

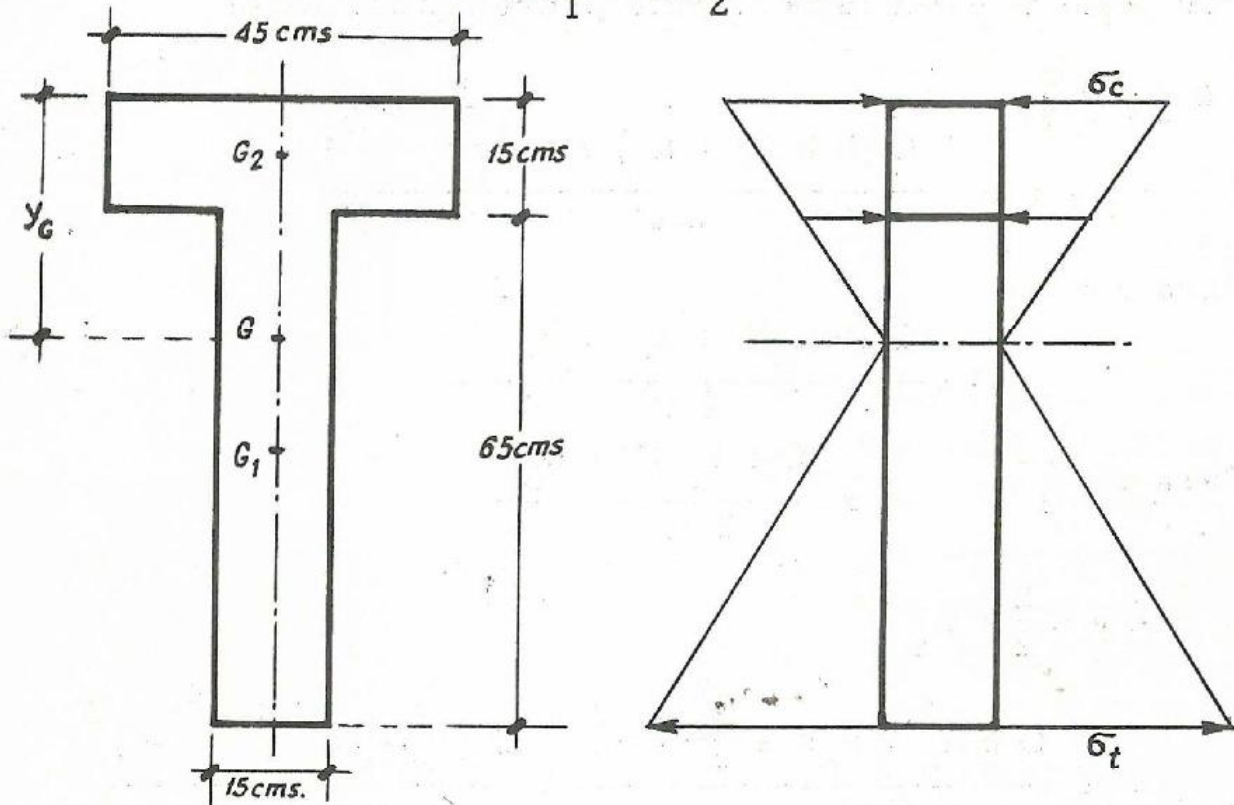
3. La sección adjunta está sometida a un $M_f = 15$ m. Tn en el centro de gravedad. Hallar las máximas tensiones positivas y negativas. También está sometida a $Q = 20$ Tn. Ha-

llar las máximas indicando en la fibra en que se producen.

1. Determinemos el c. de g. G.

$$45 \times 15 \times \overline{GG}_2 = 65 \times 15 \times \overline{GG}_1$$

$$\overline{GG}_1 + \overline{GG}_2 = 40$$



$$\left. \begin{array}{l} 9 \overline{GG}_2 = 13 \overline{GG}_1 \\ 9 \overline{GG}_2 = 360 - 9 \overline{GG}_1 \end{array} \right\} , \text{ restando}$$

$$0 = 22 \overline{GG}_1 - 360 ;$$

$$\overline{GG}_1 = \frac{360}{22} = 16,36 \text{ cms.}$$

$$\overline{GG}_2 = \frac{13}{9} 16,36 = 23,63 \text{ cms.}$$

Entonces,

$$\underline{\underline{y_G}} = \overline{GG}_2 + \frac{15}{2} = \underline{\underline{31,13 \text{ cms.}}}$$

2. - Calculemos ahora el momento de inercia de la sección respecto del c. de g.

$$I = 45 \int_{16,13}^{31,13} y^2 dy + 15 \int_0^{16,13} y^2 dy + 15 \int_{-48,87}^0 y^2 dy =$$
$$= \frac{45}{3} [31,13^3 - 16,13^3] + \frac{15}{3} 16,13^3 + \frac{15}{3} 48,87^3 = \underline{\underline{991,430 \text{ cms}^4}}$$

-o-

3. Sabemos que la tensión en una fibra a una distancia y del c. de g. es:

$$\sigma = - \frac{M_f y}{I}$$

Entonces, para el valor máximo y positivo.

$$\sigma_{\text{máx.}} = - \frac{1500000 \times 31,13}{991,430} = 47,1 \text{ Kgr/cm}^2$$

y para el máximo negativo de y ,

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{1500000 \times 48,87}{991,430} = 73,9 \text{ Kgr/cm}^2$$

-o-

4. Sabemos que la tensión cortante en una sección sometida a un esfuerzo cortante Q vale:

$$\tau_y = \frac{Q M_e}{I a_y}$$

-o-

5. - Por la forma de la sección, se ve que para y de 0 a 16,13, a_y es mínima y como M_e es mayor cuanto menor es y , el máximo valor de τ lo tendremos para la fibra que contiene al centro de gravedad.

-o-

6. Calcularemos las leyes de τ_y en la sección.

a) $0 \leq y \leq 16,13$.

$$M_e = 45 \times 15 \times 23,63 + 15 \times (16,13 - y)(16,13 + y) \frac{1}{2} =$$

$$= [1063,35 + \frac{1}{2} (260,177 - y^2)] 15 = [1193,44 - \frac{1}{2} y^2] 15$$

Entonces:

$$\tau_y = \frac{Q M_e}{I a_y} = \frac{20,000 \times 15 \times (1193,44 - \frac{1}{2} y^2)}{991430 \times 15} = 0,02(1193,44 - \frac{1}{2} y^2) =$$

$$= 23,87 - 0,01 y^2.$$

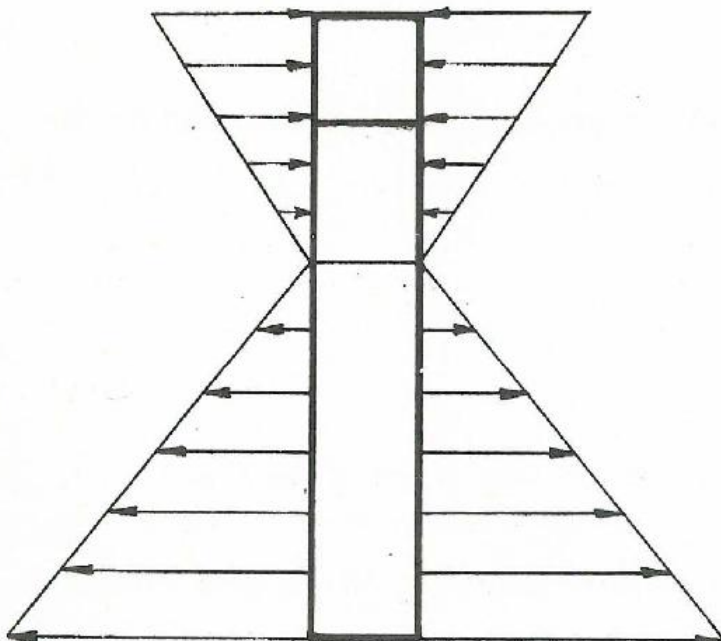
Para $y = 0$; $\tau_G = 23,87 \text{ Kgr/cm}^2.$

" $y = 16,13$; $\tau = 21,27 \text{ Kg/cm}^2.$

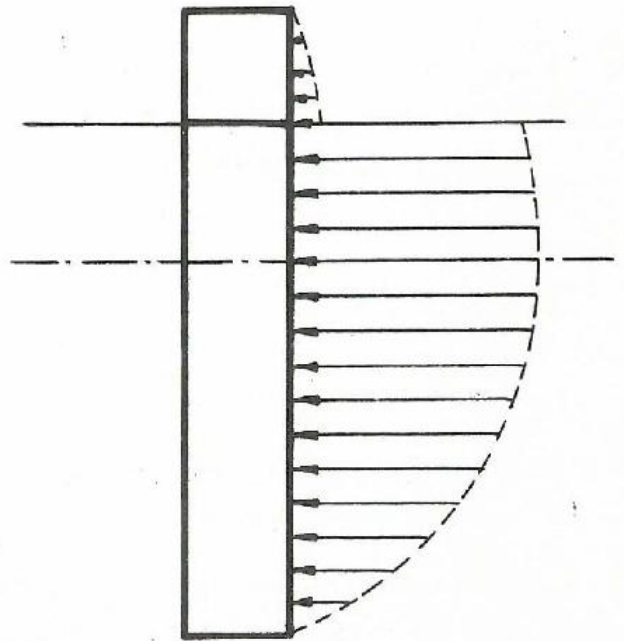
-0-

7. Representaciones gráficas.

Distribución de tensiones normales.



Distribución de tensiones cortantes.



Nota: Las tensiones tangenciales en el gráfico de la derecha - están dibujadas normales a la sección y están contenidas en ella en la realidad.

b) $16,13 \leq y \leq 31,13$.

$$M_e = 45 \times (31,13 - y) \frac{1}{2} (31,13 + y) = 45 \left[484,54 - \frac{1}{2} y^2 \right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \tau_y &= \frac{20.000 \times 45 \times \left[484,54 - \frac{1}{2} y^2 \right]}{991430 \times 45} = 0,02 \left[484,54 - \frac{1}{2} y^2 \right] = \\ &= 9,69 - 0,01 y^2 \end{aligned}$$

Para $y = 16,13$; $\tau = 7,09 \text{ Kg/cm}^2$.

" $y = 31,13$; $\tau = 0$

c) $0 \geq y \geq -48,87$.

$$M_e = 15 (+48,87 + y) \frac{1}{2} (48,87 - y) = 15 \left[1193,44 - \frac{1}{2} y^2 \right]$$

Entonces

$$\tau_y = 0,002 \left[1193,44 - \frac{1}{2} y^2 \right] = 23,87 - 0,01 y^2$$

Para $y = 0$; $\tau_G = 23,87$

" $y = -48,87$ $\tau = 0$

-o-

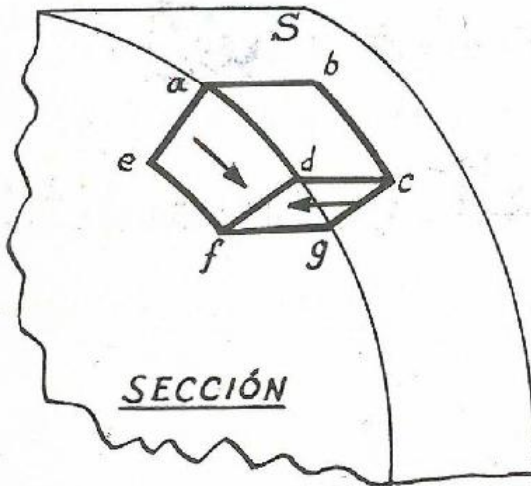
4. Determinar la distribución de tensiones en una sección circular de radio 20 cm. sometida a un M_f de 6 m. T y a un es fuerza cortante de 10 T.

19. Tensiones normales.

Aplicando $\sigma_y = \frac{M \cdot y}{I}$ " tenemos:

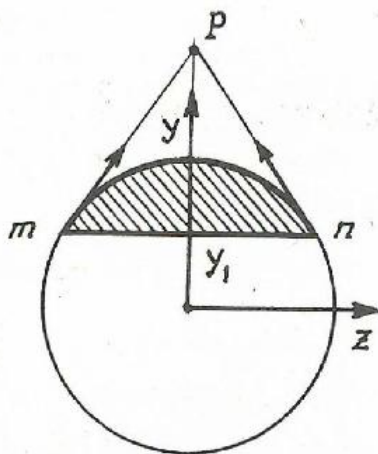
$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 20/2}{\frac{20^4}{4}} \approx 50 \text{ Kg/cm}^2$$

2º. Aquí nos surge un nuevo problema.



Sabemos que las tensiones tangenciales aparecen por parejas en planos perpendiculares y de la misma magnitud. Si tomamos un cubo que tenga una cara sobre la superficie de la pieza (abcd), si no hay esfuerzos tangenciales sobre la superficie cilíndrica en la cara (a, b, c, d) no pueden aparecer tensiones tangenciales y por tanto, en la cara de la sección (adfe) la tensión tangencial tiene que tener la dirección indicada (no puede tener componente según el radio).

En este caso se hace la hipótesis siguiente:



1º) Las tensiones tangenciales en una línea tal como la m n (normal al esfuerzo cortante) pasan todas por un punto P, obtenido por intersección de las tangentes trazadas desde m y n.

2º) La componente vertical de estas tensiones tangenciales es constante para cada línea m, n, y se calcula por la fórmula ya conocida.

$$\tau = \frac{Q m_e}{I a_y}$$

El momento ^{estático} flector del área rayada es

$$\int_{y_1}^R 2 \sqrt{R^2 - y^2} \cdot y \, dy = \frac{2}{3} (R^2 - y_1^2)^{3/2}$$

y el valor de

$$\tau = \frac{Q \frac{2}{3} (R^2 - y_1^2)^{3/2}}{2 \sqrt{R^2 - y_1^2}} = \frac{Q (R^2 - y_1^2)}{3 I z}$$

componente según el eje "y" de la tensión tangencial.

El valor de la tensión tangencial en un punto cualquiera se puede determinar fácilmente, ya que conoceríamos su dirección y su componente vertical, así en los puntos m, n, vale:

$$\tau_m = \frac{\tau R}{\sqrt{l^2 - y_1^2}} = \frac{Q_o R (R^2 - y_1^2)^{\frac{1}{2}}}{3 I_z}$$

y sobre el eje z el valor de la componente tangencial es máximo y vale:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{4 Q}{3 \pi l^2} \text{ " } I_2 = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$y_1 = 0$$

2-3. Flexión compuesta. - Una rebanada está sometida a Flexión compuesta, cuando el sistema de fuerzas a que se encuentra sometida cada cara es equivalente a un momento actuando en un plano que contenga a la directriz y a una fuerza, actuando en el plano del momento.

Si la fuerza está contenida en la cara, es flexión simple, y si no está contenida en la cara, puede descomponerse en una contenida en la cara (tangencial y otra perpendicular a la cara (normal)).

El estudio de la distribución de tensiones se realiza aplicando el principio de superposición de efectos, existiendo en cada punto un esfuerzo tangencial y uno normal.

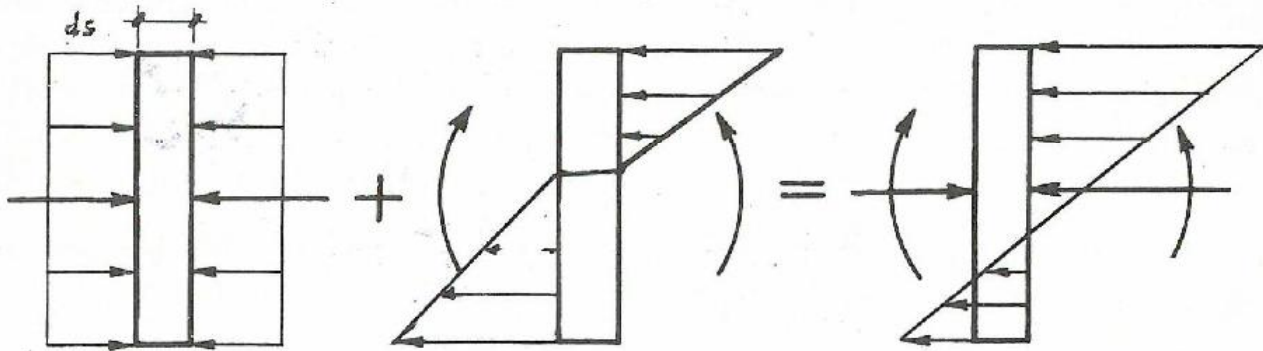
El esfuerzo tangencial se calcula como en flexión simple. El esfuerzo normal como suma de los originados por el M_f y el N.

En las secciones en que puedan aplicarse estas fórmulas las tensiones son:

$$\tau_y = \frac{Q M_e}{b y} \quad (1) \quad \text{"} \quad \sigma = \frac{N}{\Omega} \pm \frac{M_f y}{I} \quad (2)$$

El signo \pm depende del sentido elegido para M_f y el eje y; pa-

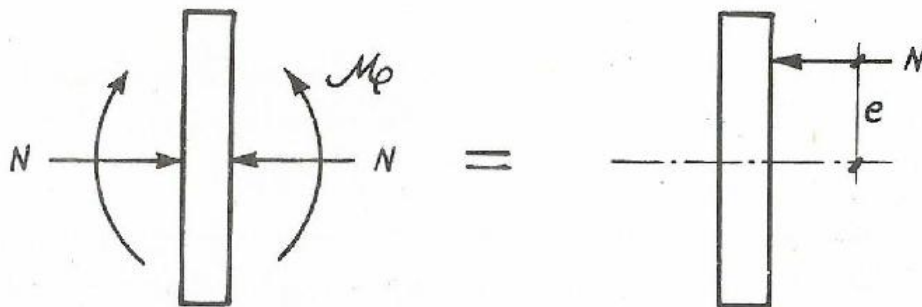
ra evitar confusión en la elección del signo es recomendable dibujar un esquema de las tensiones como se indica en la figura.



Como consecuencia de esta distribución de tensiones normales la fibra neutra deja de pasar por el centro de gravedad de la sección; aunque se hace constar que los valores del momento estático M_e y del momento de Inercia I que aparecen en la fórmula están referidos a la fibra neutra de la sección sometida a flexión pura.

Si la fibra neutra cae dentro de la sección aparecen tensiones de tracción y de compresión, si se sale fuera de la sección, toda ella se encuentra sometida a compresión no uniforme diciéndose entonces que está sometida a compresión compuesta, o de tracción compuesta.

El esfuerzo axial N y el momento flector M_f pueden reducirse a una sola fuerza de valor N perpendicular a la sección y con una excentricidad $e = M_f/N$.



Según cual sea esta excentricidad, la distribución de tensiones puede ser de flexión compuesta o de compresión compuesta, independientemente del valor de N , como podemos comprobar al sustituir $M_f = N \cdot e$ en la ley de distribución de tensiones.

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \pm \frac{M_f y}{I} = N \left(\frac{1}{\Omega} \pm \frac{ey}{I} \right)$$

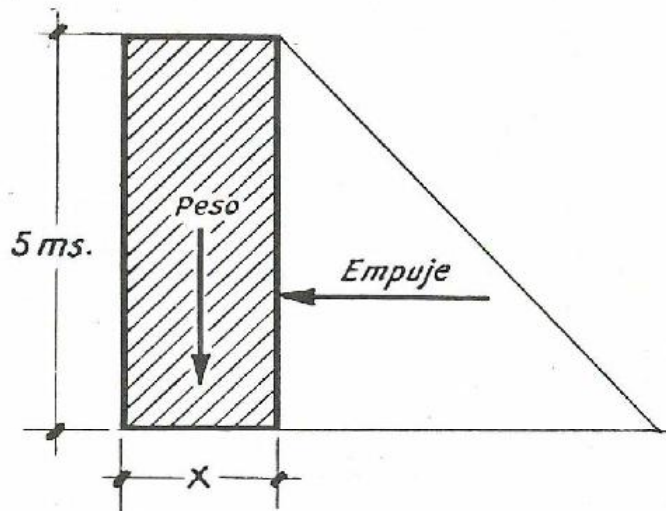
Se define núcleo central de una sección al lugar geométrico de los puntos de la misma, en los que la aplicación de una fuerza normal produce un estado de compresión compuesta.

El contorno del núcleo central se determina obligando a que sea nula la tensión en el punto más desfavorable para cada orientación de la sollicitación.

El núcleo central es, pues, independiente del valor que tenga la fuerza de compresión N .



2. - Un muro de 5 m. de altura con un peso específico relativo de 2,2 soporta un empuje hidrostático. Calcular el espesor del mismo para que no aparezcan tracciones en la base.



Estudiaremos un muro de anchura unidad.

El empuje vale:

$$E = \frac{1}{2} 5 \times 5 = 12,5$$

El peso vale:

$$P = 5x \cdot 2,2 = 11x.$$

La tensión de compresión debida al peso vale:

$$\sigma_c = \frac{+P}{x} = + 11 \text{ Kg/cm}^2.$$

La tensión de tracción debida al empuje vale:

$$\sigma_t = + \frac{M_f \cdot \frac{x}{2}}{I}$$

$$M_f = E \cdot y_G = 12,5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{62,5}{3}$$

$$I = \frac{1}{12} x^3 = \frac{x^3}{12}$$

Luego:

$$\sigma_t = \frac{\frac{62,5}{3} \cdot \frac{x}{2}}{x^3/12} = \frac{125}{x^2} \text{ Kg/cm}^2$$

Las condiciones de que no aparezcan tracciones en la base nos lleva a que $\sigma_c \geq \sigma_t$.

Luego:

$$\frac{125}{x^2} \leq 11.$$

$$\frac{125}{11} \leq x^2 ; \quad x \geq \sqrt{\frac{125}{11}} = 3,37 \text{ ms.}$$

Por tanto, el mínimo espesor de muro que puede ponerse es 3,37 ms.

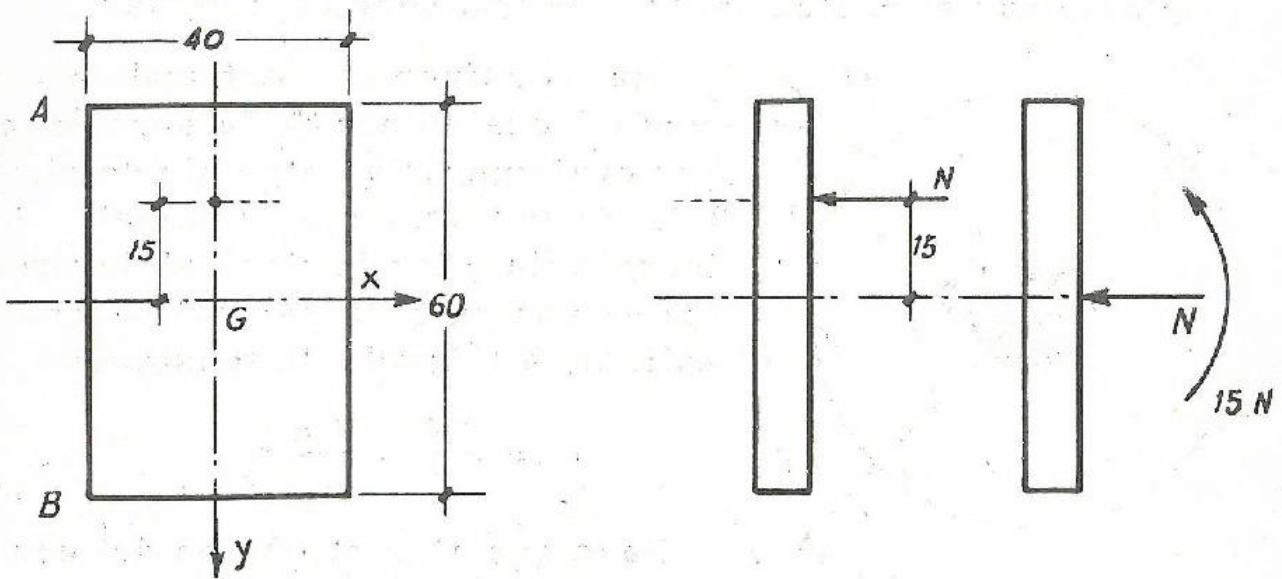
-o-

2. Determinar el máximo esfuerzo de compresión que admite una sección rectangular de 60 cms. de canto y 40 de ancho, sabiendo que actúa en un punto situado en el eje vertical de simetría y a 15 cms. por encima del c. de g. Resistencias admisibles: compresión 60 Kg/cm². a tracción 6 Kg/cm².

Reduciendo el esfuerzo N al c. de g. de la sección tenemos un esfuerzo axial N y un momento 15 N que produce una distribución de tensiones

$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I}$$

La máxima tensión de compresión aparece en la fibra A, siendo



$$\sigma_A = -\frac{N}{\Omega} - \frac{N \cdot e \cdot 30}{I}$$

La máxima tensión de tracción aparece en la fibra B, siendo

$$\sigma_B = -\frac{N}{\Omega} + \frac{N \cdot e \cdot 30}{I}$$

El esfuerzo N debe satisfacer por tanto las dos condiciones de limitación de tensiones.

$$|\sigma_A| \leq 60 \quad |\sigma_B| \leq 6$$

De la primera tenemos:

$$\frac{N}{2400} + \frac{N \cdot 450}{720.000} \leq 60 ;$$

$$\frac{N}{2400} + \frac{1,5N}{2400} = \frac{2,5 N}{2400} \leq 60 ; \quad N \leq \frac{2400 \cdot 60}{2,5} = 57.600 \text{ Kg.}$$

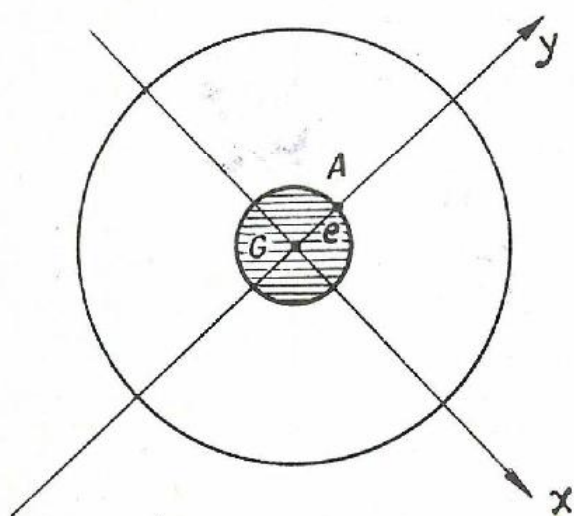
De la segunda tenemos:

$$\frac{N \cdot 450}{720.000} - \frac{N}{2400} \leq 6$$

$$\frac{1,5 N}{2400} - \frac{N}{2400} = \frac{0,5 N}{2400} \leq 6 ; \quad N \leq \frac{6 \cdot 2400}{0,5} = 28.800 \text{ Kg.}$$

Por tanto, el máximo esfuerzo admisible es de 28.800 Kg. ya que mayores valores de éste darían tensiones superiores a las admisibles.

3. - Determinar el núcleo central de una sección circular.



Sea un esfuerzo N actuando en un punto A cualquiera de la sección; al ser cualquier diámetro eje de simetría y por tanto, eje principal de inercia (la elipse principal de inercia es una circunferencia) podemos aplicar la fórmula de tensiones,

$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} - \frac{N e y}{I_x}$$

Para que el punto A sea del contorno del núcleo central debe ser $\sigma_B = 0$.

$$0 = -\frac{N}{\Omega} + \frac{N e R}{I_x}$$

como

$$\Omega = \pi R^2 ; \quad I_x = \pi \frac{R^4}{4}$$

Tenemos

$$\frac{N}{\Omega} = \frac{N e R}{I_x} ; \quad I_x = e R \Omega$$

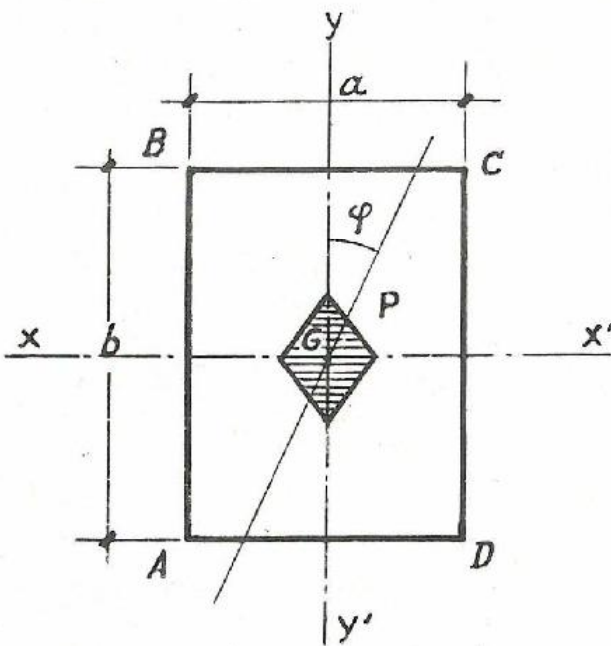
$$\frac{\pi R^4}{4} = e R \pi R^2 ; \quad e = \frac{R}{4}$$

Como esto se cumple en cualquier dirección el núcleo central es una circunferencia concéntrica cuyo radio es la cuarta parte del de la sección.

-0-

4. - Determinar el núcleo central de una sección rectangular.

Consideremos un esfuerzo normal N actuando en un punto P de la sección definido por su excentricidad (distancia entre P y el c. de g.) y por el ángulo que la recta que pasa por estos dos puntos forma con uno de los ejes principales de inercia.



Trasladando el esfuerzo N al c. de g . tenemos un esfuerzo axial N y un momento flector $N \cdot e$ que descomponemos en las direcciones $-xx'$ yy' .

La tensión en un punto de coordenadas (x, y) será, aplicando el principio de superposición de efectos.

$$\sigma = -\frac{N}{\Omega} - \frac{N \cdot e \cdot \cos \varphi \cdot y}{I_x} - \frac{N \cdot e \cdot \sin \varphi \cdot x}{I_y}$$

Si la fuerza N actúa dentro del núcleo central toda la sección está sometida a compresión, estando la fibra neutra de la sección.

Cuando la tensión de compresión en el punto más descargado sea nula la fuerza N estará actuando en el borde del núcleo central. Determinamos entonces la excentricidad e correspondiente a la dirección φ obligando a que la tensión en A sea nula.

$$\begin{aligned} \sigma_A = 0 &= -\frac{N}{\Omega} + \frac{N \cdot e \cdot \cos \varphi \cdot \frac{b}{2}}{I_x} + \frac{N \cdot e \cdot \sin \varphi \cdot \frac{a}{2}}{I_y} = \\ &= -\frac{N}{ab} + \frac{6 N e \cos \varphi}{ab^2} + \frac{6 N e \sin \varphi}{ab^2} = \\ &= -ab + 6a \cdot e \cos \varphi + 6b e \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

En la figura tenemos que $e \cos \varphi =$ ordenada del punto P del borde del núcleo central $= Y$; $e \sin \varphi =$ abscisa $= X$, sustituyendo,

$$ab = 6aY + bX$$

obligando a que se anulen las tensiones en los puntos $B \cdot C \cdot D$, obtenemos las ecuaciones de las otras tres rectas que limitan el núcleo central que en este caso es un rombo.

En particular haciendo $Y = 0$ en la ecuación obtenida, es decir, cuando la flexión actúa en el plano xx' , tenemos:

$$X = \frac{a}{6}$$

Análogamente haciendo $X = 0$ flexión en el plano YY' , tenemos:

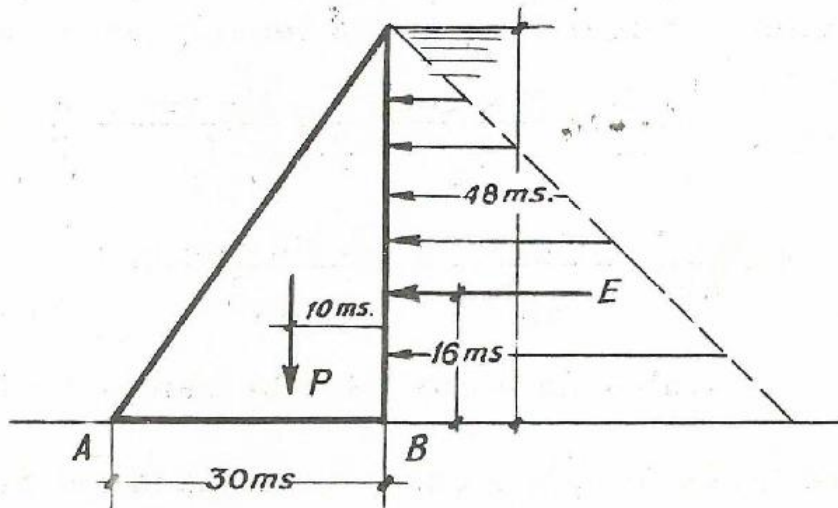
$$Y = \frac{b}{6}$$

Luego las diagonales del rombo tienen por dimensiones la tercera parte del lado correspondiente del rectángulo;

-o-

5. - Una presa de gravedad de peso específico 2,4, cuyo perfil transversal se indica en la figura, soporta una carga de agua igual a su altura. Sabiendo que la base no puede soportar tracciones calcular la amplitud de la grieta que se produce.

Consideremos una anchura unidad de presa sometida a:



La presión hidrostática, con una distribución triangular cuya resultante es un empuje E aplicado a una distancia del fondo igual a un tercio de la altura, de valor:

$$E = \frac{1}{2} 48^2 = 1.152 \text{ T.}$$

El peso de la presa, aplicado en el c. de g. de la sección transversal, de valor:

$$P = \frac{1}{2} 30 \cdot 48 \cdot 2,4 = 1.724 \text{ T.}$$

La sección AB de apoyo de la presa se encuentra sometida a las siguientes fuerzas:



Que reducidas al c. de g. G de la sección son:

$$N = P = 1724 \text{ T.}$$

$$Q = E = 1152 \text{ T.}$$

$$M_f = 16E - 5P = 1152 \cdot 16 - 5 \cdot 1724 = 18432 - 8620 = 9812 \text{ m. T.}$$

Sometida a estos esfuerzos aparece una distribución de tensiones normales.

$$\sigma = -\frac{N}{30} + \frac{M_f x}{I} = -\frac{1724}{30} + \frac{9812 x}{\frac{1}{12} \cdot 30^2}$$

En el punto B, tenemos:

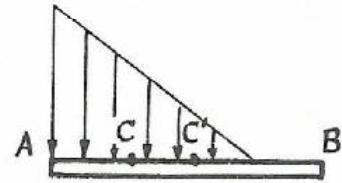
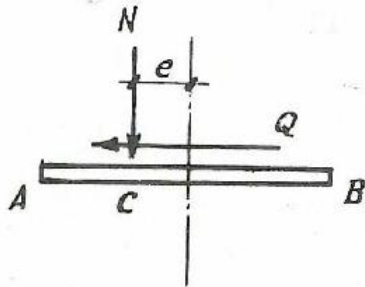
$$\sigma_B = -\frac{1724}{30} + \frac{6 \cdot 9812}{900} = 7,95 \text{ T/m}^2$$

A primera vista podría pensarse que como la sección no admite tracciones se rompería en toda la zona traccionada, es decir, que la grieta tendría una longitud l ; el razonamiento es falso, ya que al formarse la grieta disminuye la sección resistente variando su área y su momento de inercia por lo que ya no es válida la fórmula anterior de distribución de tensiones.

Resolveremos el problema aplicando la idea del núcleo central para que pueda comprobarse la rapidez que presenta en muchas ocasiones.

Reducimos los esfuerzos N y M_f a una compresión excéntrica N a distancia:

$$e = \frac{M_f}{N} = \frac{9812}{1724} = 5,7 \text{ ms.}$$



El núcleo central de una sección rectangular, tiene una dimensión igual a la tercera parte de su canto como vimos anteriormente.

Cuando la fuerza N no varía su punto de aplicación, y lo que van variando son las secciones resistentes y, por tanto, sus núcleos centrales, al ir formándose la grieta; llegará un momento en que del núcleo central estará en el punto de aplicación de N, dejando de aparecer tracciones y desapareciendo la grieta. En este caso la sección restante tendrá una dimensión.

$$AC' = 3 AC = 3 (15 - 5,7) = 27,9 \text{ ms.}$$

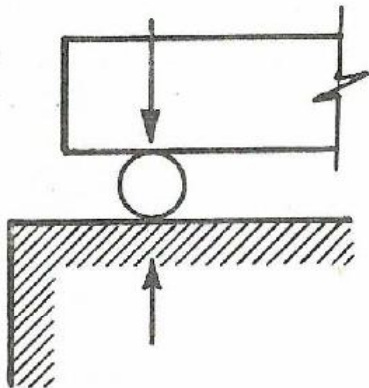
La grieta formada tendrá, pues, una dimensión:

$$C'B = AB - AC' = 30 - 27,9 = 2,1 \text{ m.}$$

La distribución de tensiones será la indicada en el esquema, estando la parte C'B descargada naturalmente.

3-1. - ENLACES. - 3-2. - ISOSTATICAS. - HIPERESTATICAS.
3-3. - REACCIONES Y ESFUERZOS EN PIEZAS ISOSTATICAS

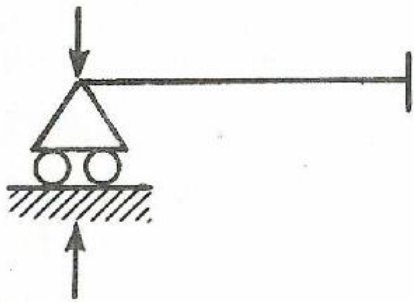
3-2. - ENLACES. -



I - Deslizadera.

Impide un solo movimiento de la pieza: el vertical. O sea, es un enlace con una coacción dejando libre el desplazamiento horizontal y el giro.

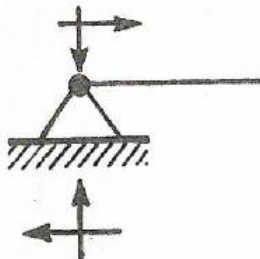
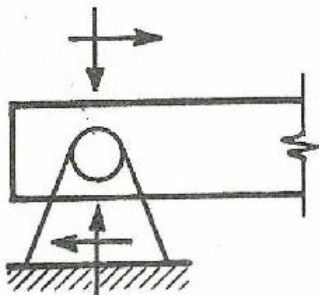
En la figura están representados esquemáticamente.

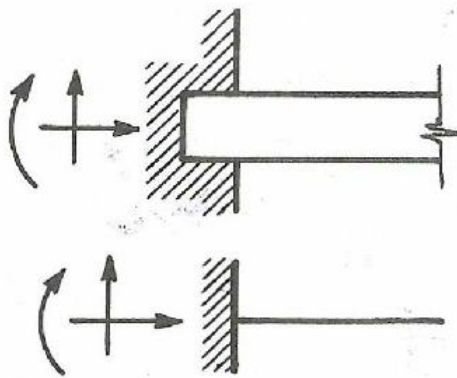


II - Articulación.

Impide dos movimientos (desplazamientos), luego el enlace tiene una doble coacción.

El giro no está impedido por tanto, no transmite momentos.





III- Empotramiento.

Este tipo de enlace presenta tres coacciones, estando impedido cualquier movimiento de la pieza; transmite a través del enlace los momentos y los esfuerzos en cualquier dirección.

3-2. - ISOSTATICAS. - Un cuerpo plano está en equilibrio, si

$$\Sigma X = 0 ; \quad \Sigma Y = 0 ; \quad \Sigma M = 0 \text{ (3 ecuaciones).}$$

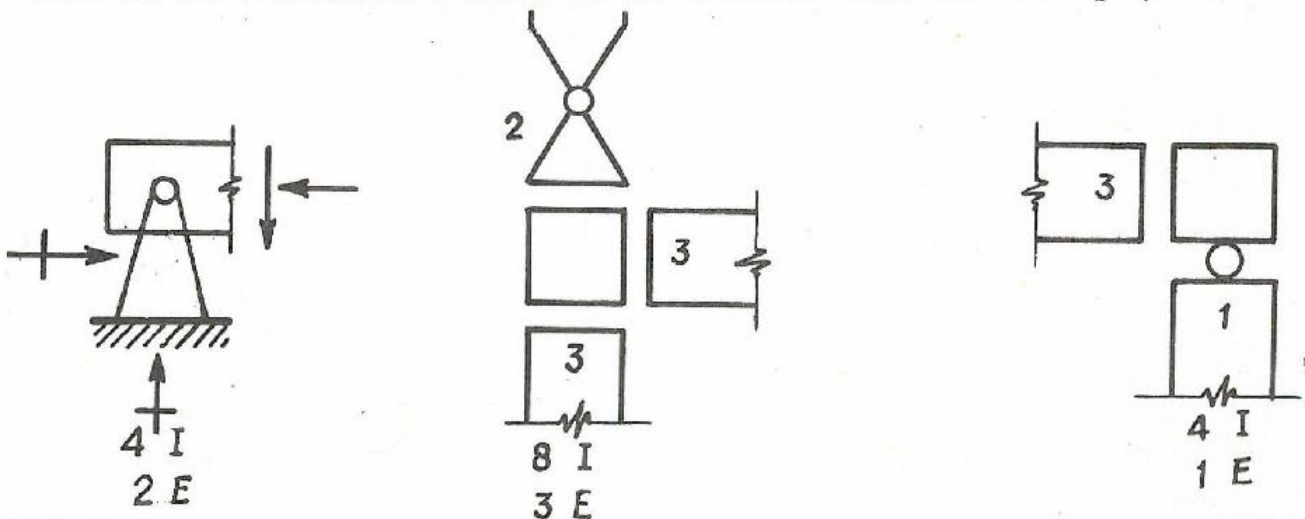
Una estructura es isostática externa, si las condiciones de la estática bastan para determinar las reacciones.

Una estructura es isostática completa, cuando además lo es para cualquier parte aislada queelijamos, al introducir las acciones que ejerce el resto de la estructura sobre ella.

En este caso y por las simples condiciones de la estática podremos determinar cualquier reacción de la estructura tanto exterior como interior.

Entonces para saber si una estructura es isostática debemos mirar si el número de ecuaciones independientes que podemos obtener de ella es igual al número de reacciones desconocidas.

Incógnitas. - Es igual a la suma de coacciones de todos los nodos de la estructura más el de coacciones de los apoyos.



Ecuaciones. - Es igual a la suma de 3 ecuaciones por pieza, - más tantas ecuaciones por nudo como coacciones máximas pueda transmitir el nudo.

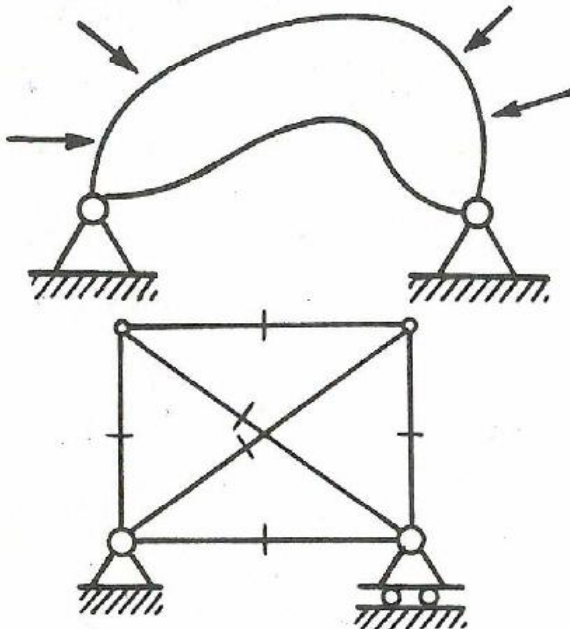
Debajo de las figuras de la página anterior se indica con I incógnitas, con E ecuaciones.

Al contar el número de I y de E en una estructura puede ocurrir que:

a) $I = E$ en la estructura y en cualquier parte de ella se dice

ISOSTATICA.

b) $I > E$ - Puede ocurrir que considerando la estructura como cuerpo rígido tengamos más de 3 coacciones en los apoyos, entonces diremos que se trata de una estructura hiperestática externa y el número de reacciones hiperestáticas será $I - E$.

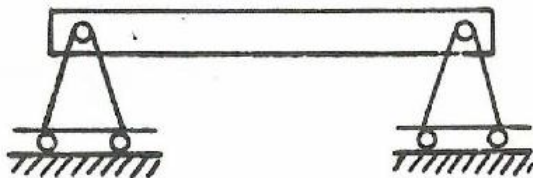


Puede ser que sea además hiperestática una parte aislada de la estructura, entonces se dice que es hiperestática interna.

$$\left. \begin{array}{l} E = 26 \\ I = 27 \end{array} \right\} \text{ 1 hiperestática.}$$

$E > I \rightarrow$ la estructura se dice incompleta, y resulta un mecanismo. El número de grados de libertad es $E - I$, Puede -

ocurrir como antes que sea un mecanismo para las coacciones externas, o para las internas.

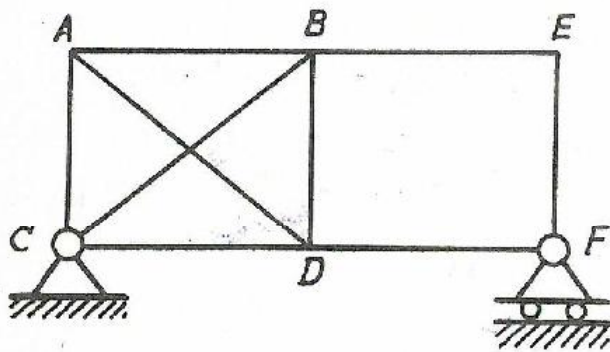


$$\left. \begin{array}{l} E = 5 \\ I = 4 \end{array} \right\} \text{ 1 grado de libertad puede}$$

tener movimiento horizontal.

La estructura dibujada en la página siguiente:

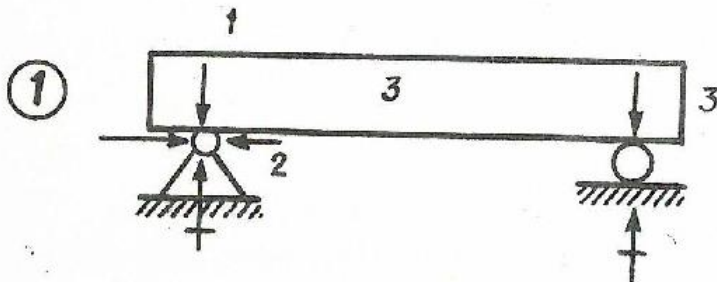
HIPERESTATICA la parte ABCD.



INCOMPLETA la BDEF

y si nosotros contásemos el número de E y de I resultaría $E = I$ debido a que hay una hiperestática y 1 grado de libertad. Pero la estructura no es ISOSTÁTICA por no serlo cualquier parte de ella.

EJEMPLOS:



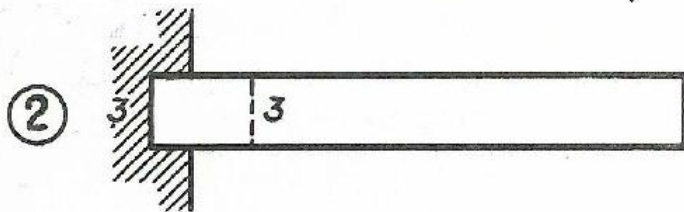
Coacciones - 3

" de los apoyos 3

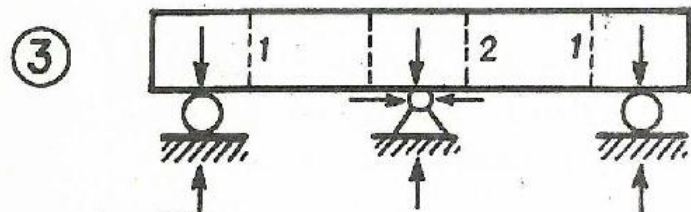
Núm. de incógnitas $3 + 3 = 6$
Ecuaciones: 3 por barra + 3.
De los nudos = 6.

$E = I \rightarrow$ ISOSTÁTICA.

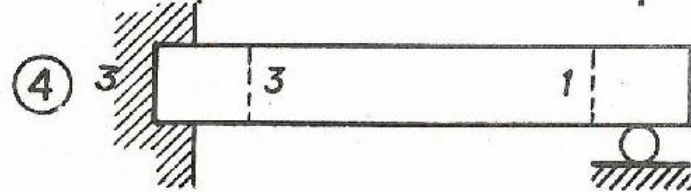
Ecuaciones - 6
Incógnitas - 6 } ISOSTÁTICAS



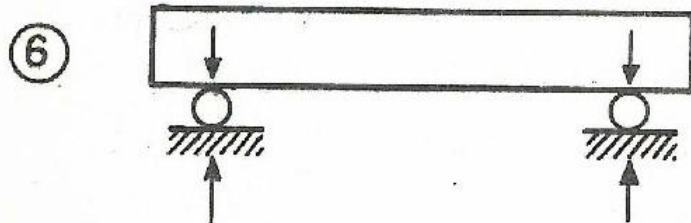
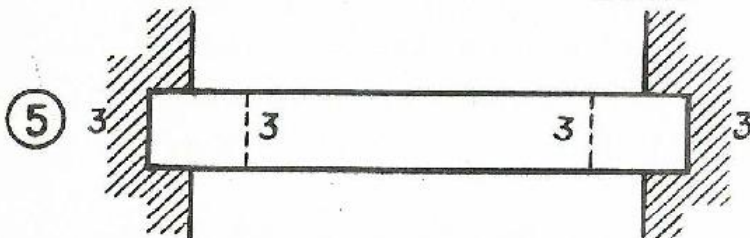
Ecuac. - 7
Incógn. 8 } HIPERESTAT.
(1 incóg. HIPER.)



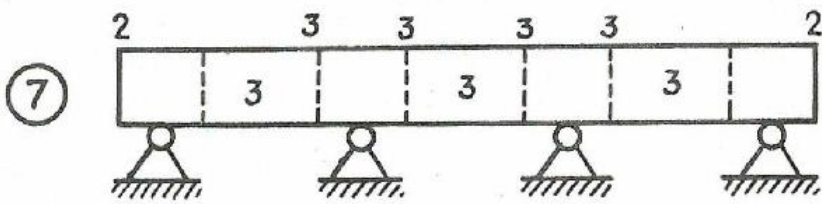
$E = 7$
 $I = 8$ } \rightarrow H. (incóg. HIPER).



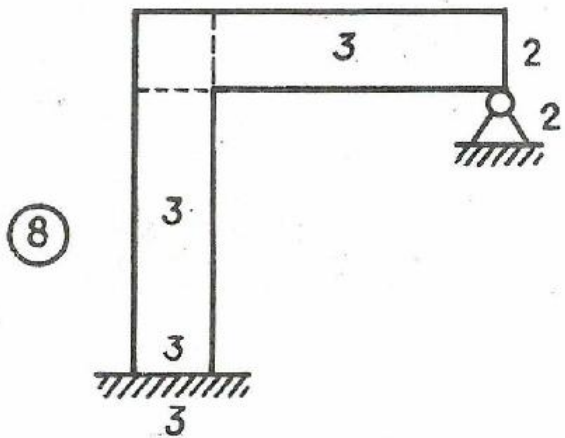
$3E = 9$
 $I = 12$ } \rightarrow H. (3 incóg. HIPER.)



$E = 5$
 $I = 4$ } \rightarrow INCOMPLETA
(1 grado de libertad).

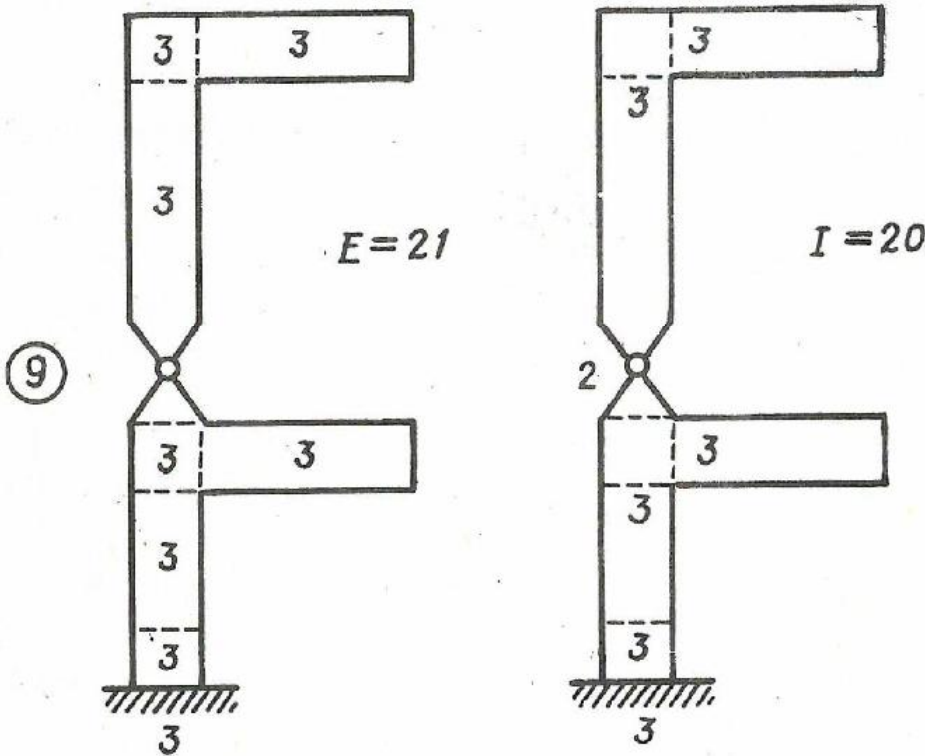


$E = 19$ | HIP (5 Hiper-
 $I = 24$ | estática)

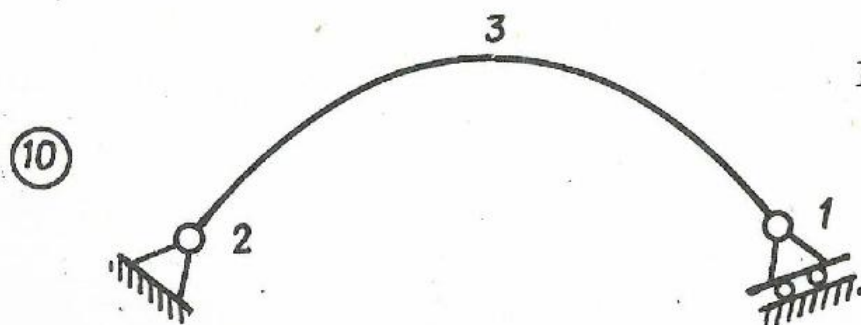


$E = 14$ |
 $I = 16$ |

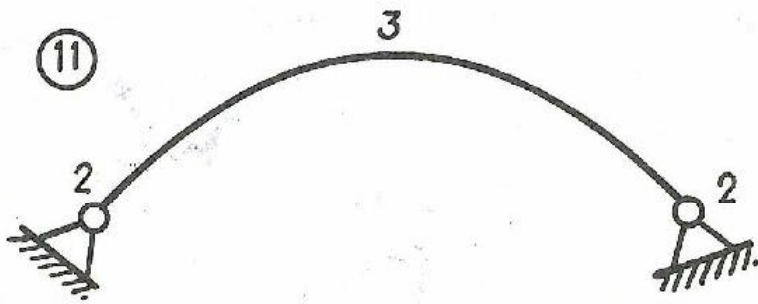
H (2 HIPERESTÁTICA)



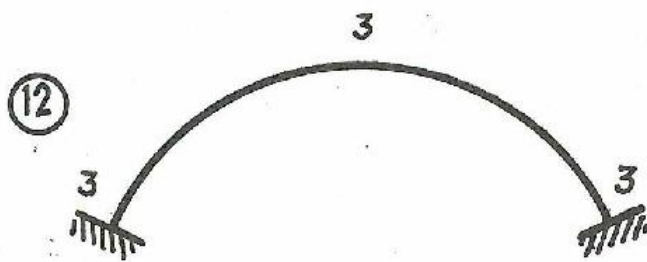
$E=21$ |
 $I=20$ (INCOMP.)



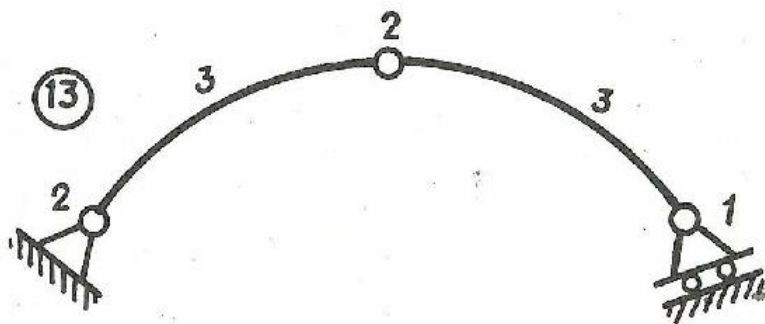
$E = 6$ |
 $I = 6$ | ISOSTÁTICO.



$E = 7$ | HIPEREST.
 $I = 8$



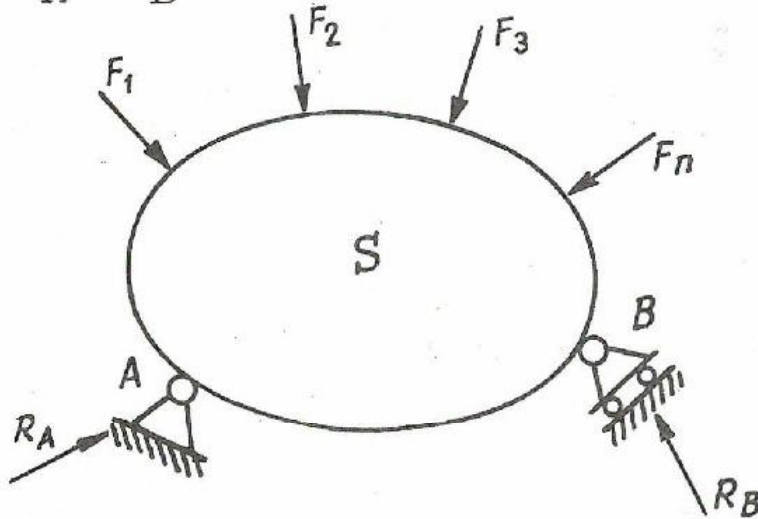
$E = 9$ | HIPEREST. (3)
 $I = 12$



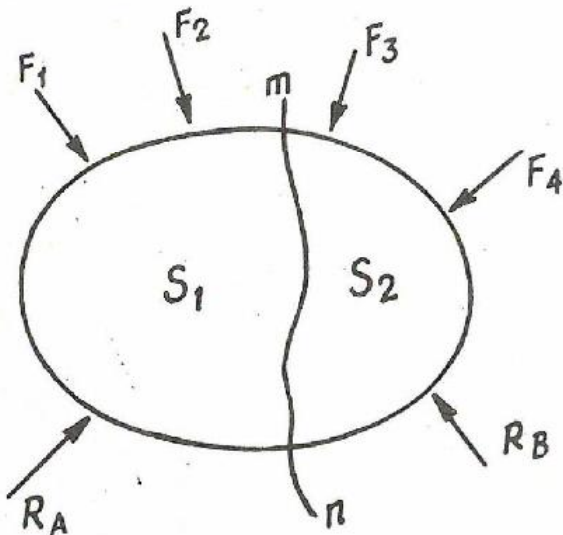
$E = 11$ | INCOMPLETA.
 $I = 10$

3-3. PIEZAS ISOSTATICAS. - Reacciones. - La manera más sencilla de calcularlas es tomando momentos en los apoyos.

Leyes de M_f , Q y N . - Si tenemos un sólido S como el indicado en la figura está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas F_1 , F_2 , $F_3 \dots F_n$, R_A y R_B .



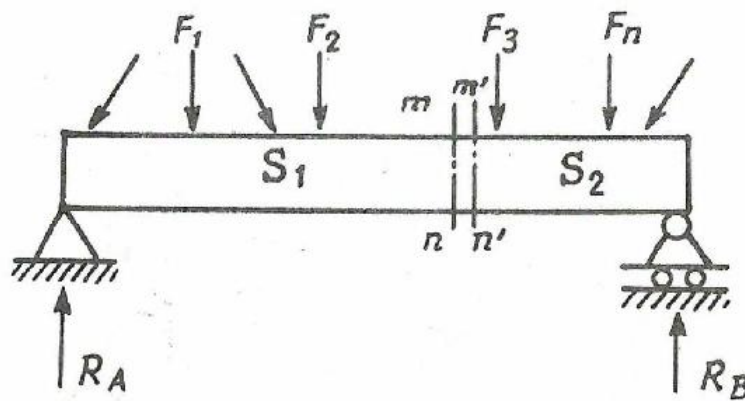
Si nosotros damos una sección tal como la mn , cada una de las partes está en equilibrio por la acción de las fuerzas que actúan directamente sobre ella y de las transmitidas por la otra que forman un sistema equivalente al de fuerzas que actúan sobre la misma.



En lo que sigue vamos a considerar piezas simétricas con cargas actuando en el plano de simetría.

En la viga dibujada en la página siguiente, demos un corte m , n normal a la directriz y reduzcamos el sistema de fuerzas que actúan sobre S_2 al centro de gravedad de la sección m, n ; como se trata de un sistema de fuerzas contenido en un plano quedará reducido a una fuerza F y a un momento M .

La fuerza F la descomponemos según la dirección de la directriz (N) y el eje de simetría (Q).



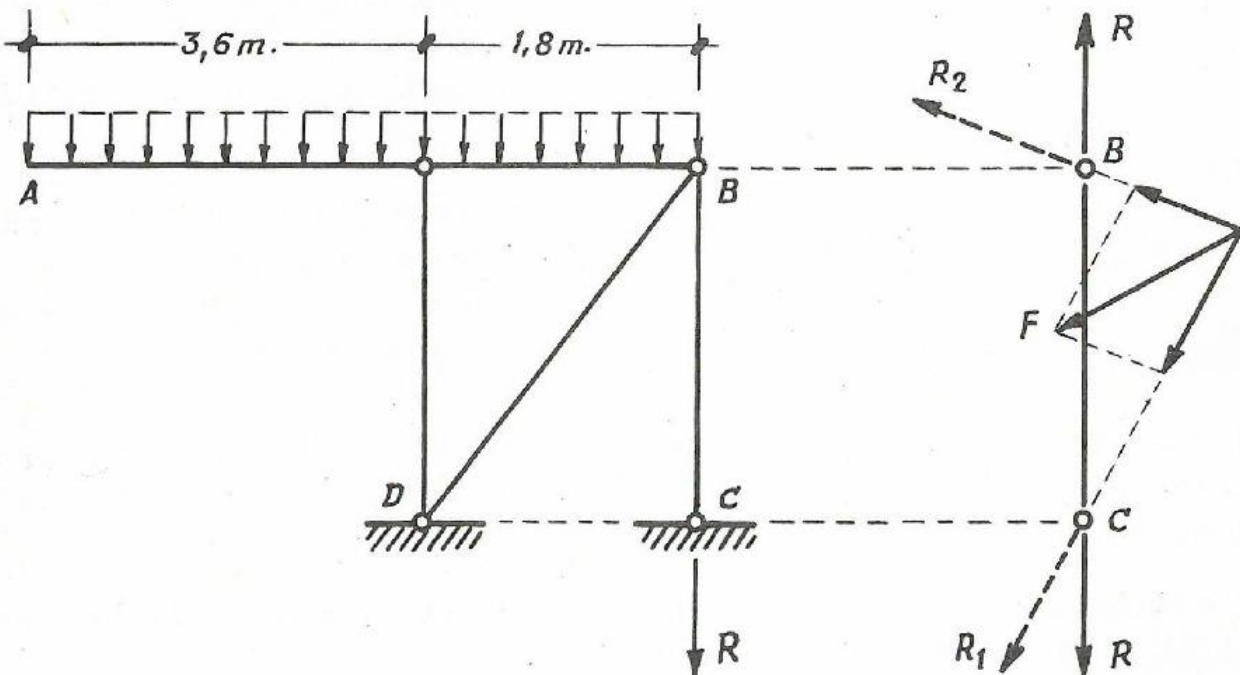
Si hubiéramos reducido el sistema que actúa sobre S_1 , hubiéramos obtenido un momento y unas fuerzas iguales y de sentido contrario (como debe ocurrir por estar la viga en equilibrio).

La representación gráfica o analítica de estos esfuerzos a lo largo de la viga recibe el nombre de leyes de variación de momentos flectores, cortantes o axiales.

Se recomienda añadir a la ley, una rebanada que nos indique el sentido positivo tomado para el esfuerzo.

-0-

1. - Determinar la sección necesaria para la barra de acero BC, si la tensión de trabajo es $\sigma_b = 1000 \text{ Kg/cm}^2$ y la carga vertical uniformemente distribuida actúa sobre la viga AB a razón de $1.500 \text{ Kg/m} \cdot \ell$.



Al considerar la barra BC, sometida a la reacción del resto de la estructura y del apoyo, y aplicarla las condiciones estáticas de equilibrio obtenemos que las fuerzas actuantes deben ser iguales y de sentido contrario y actuando en la dirección de la barra.

Si las reacciones fueran otras cualesquiera R_1 y R_2 nos darían una resultante F no nula y la barra BC no estaría en equilibrio.

Por tanto, la estructura, aparentemente hiperestática por ser articulada, es isostática, ya que la reacción en C debe ser vertical. La reacción la determinamos tomando momentos en D.

$$1,8 \cdot 3,6 \cdot 1.500 = 1,8 \cdot 1500 \cdot 0,9 + R \cdot 1,8$$

$$R = 1500 (3,6 - 0,9) = 4050 \text{ Kg.}$$

La barra BC está sometida pues, a un esfuerzo de tracción de 4.050 Kg.

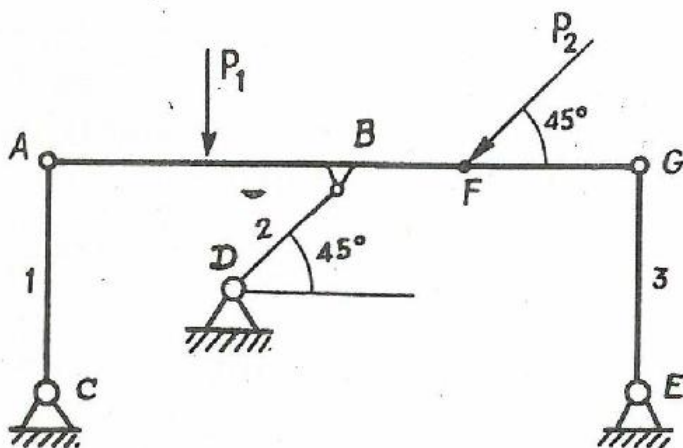
$$\Omega_{BC} = \frac{R}{\sigma_t} = \frac{4050}{1000} = 4,05 \text{ cm}^2.$$

-o-

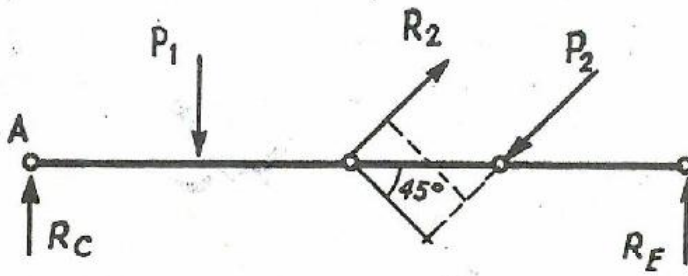
2. Determinar analíticamente los esfuerzos axiales en las barras 1, 2, 3 que sostienen la viga AB.

$$AB = 2 \text{ BF} = BG = 2 \text{ mts.}$$

$$P_1 = P_2 = 2 \text{ Kg.}$$



1º. Por estar las barras biarticuladas, las fuerzas que actúan sobre ellas, han de tener la dirección de estas; la única que puede absorber un esfuerzo horizontal es la BD, luego de aquí deducimos que $R_D = P_2$.



Sustituyendo la barra BD por la reacción R_D nos queda la siguiente figura para determinar las reacciones en C y E.

Tomando momentos en A, tenemos:

$$R_E \cdot 4 = P_1 \cdot 2 + l_D \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} "$$

ya que R_D y P_2 forman par.

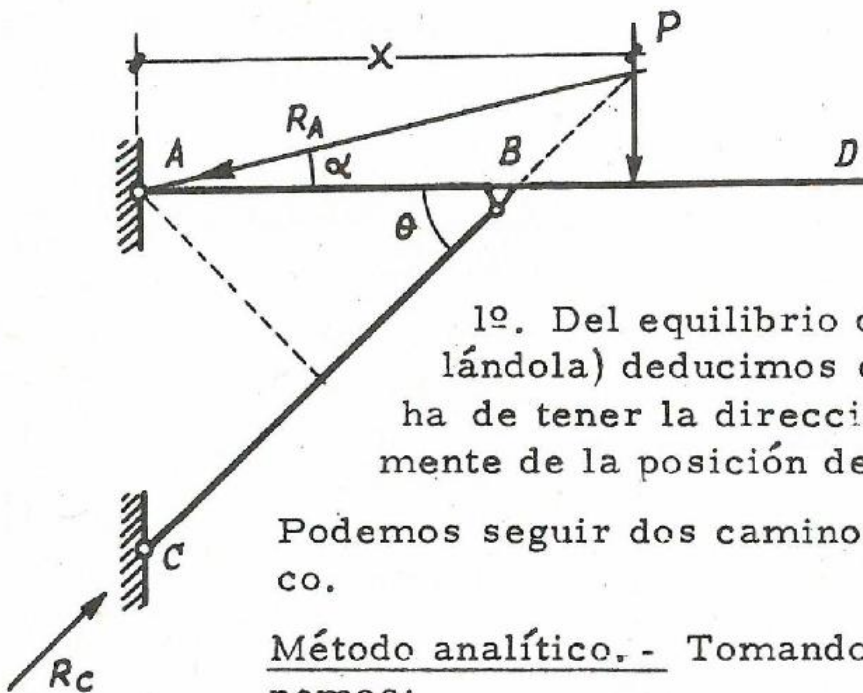
$$R_E = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{4 + \sqrt{2}}{4} \text{ Kg.}$$

$$R_A = 2 - \frac{4 + \sqrt{2}}{4} = \frac{4 - \sqrt{2}}{4} \text{ Kg.}$$

- o -

3. - Determinar la posición de la carga P en la viga ABD de tal modo que la fuerza en la barra BC sea máxima. Determinar el ángulo θ

de modo que el volumen de la barra BC sea mínimo - permaneciendo - constante AB.

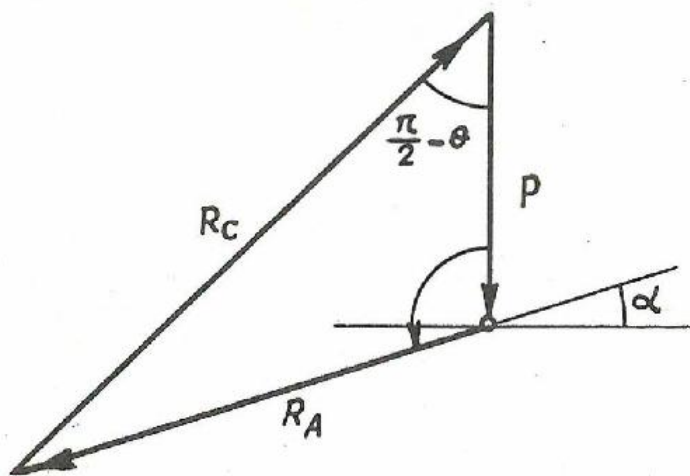


1º. Del equilibrio de la barra BC (aislándola) deducimos que la reacción en C ha de tener la dirección CB independientemente de la posición de P sobre AD.

Podemos seguir dos caminos, analítico o gráfico.

Método analítico. - Tomando momentos en A, tenemos:

$$R_C \cdot d = P \cdot x \quad R_C = \frac{P}{d} x \Rightarrow R \text{ es máxima}$$



De la figura

$$l_1 = \frac{l}{\cos \vartheta} = \frac{\overline{AB}}{\cos \vartheta}$$

$$\Omega \cdot \sigma = R_C = \frac{P \cdot \overline{AD}}{d}; \quad \Omega = \frac{P \cdot \overline{AD}}{d \sigma} = \frac{P \cdot \overline{AD}}{AB \sin \vartheta \cdot \sigma}$$

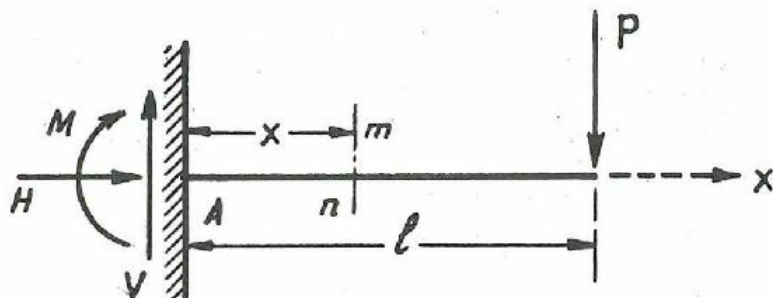
Sustituyendo en (1)

$$V = \frac{\overline{AB}}{\cos \vartheta} \cdot \frac{P \overline{AD}}{\overline{AB} \sin \vartheta} = 2 \frac{P}{\sigma} \overline{AD} \cdot \frac{1}{\sin 2\vartheta}$$

$$V_{\min} \rightarrow \sin 2\vartheta = 1 \rightarrow \underline{\underline{\vartheta = 45^\circ}}$$

-o-

4. - Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en una mén sula con una carga vertical P en su extremo.



Las reacciones en el empotramiento son: una fuerza horizontal H, una vertical V y un momento M. Como la estructura es isostática podemos determinarlas mediante las ecuaciones

de equilibrio estático.

Equilibrio de fuerzas

$$H = 0$$

$$V = -P$$

El equilibrio de momentos (tomándoles con respecto al empotramiento)

$$M = - P \cdot l$$

Para determinar las leyes de esfuerzos consideramos una sección $m-n$ a distancia x ; tomaremos como esfuerzos positivos los indicados en los esquemas siguientes:



Los esfuerzos podremos determinarlos considerando fuer - zas dorsales o frontales; como comprobación de que se obtie - nen los mismos valores, les calcularemos de las dos maneras:

- Considerando fuerzas frontales:

$$N = 0$$

$$Q = 0$$

$$M_f = - P(l - x)$$

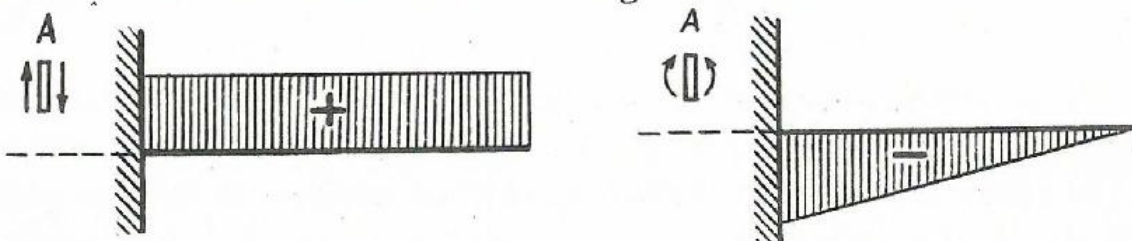
- Considerando fuerzas dorsales:

$$N = 0$$

$$Q = V = P$$

$$M_f = M + Vx = Pl + Px = - P(l - x)$$

Las representaciones son las siguientes:



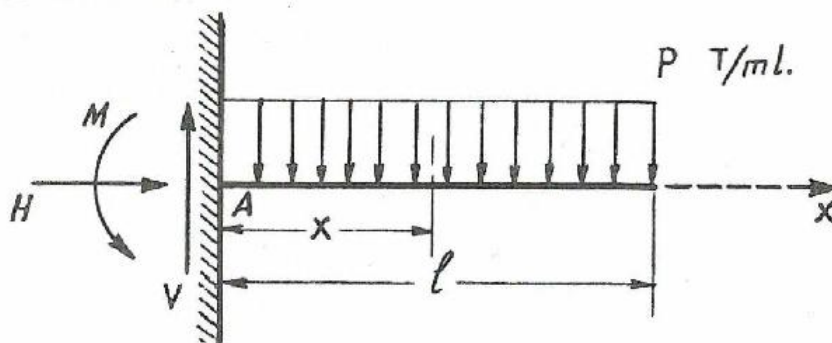
Se recomienda poner en los diagramas unos esquemas A que nos indiquen qué esfuerzos hemos tomado como positivos.

Debe observarse que según consideremos fuerzas dorsales o frontales, cambia el sentido de las fuerzas o momentos del sistema equivalente que nos hace positivo el esfuerzo.

-0-

5. - Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en una ménsula sometida a una carga uniforme de $P \text{ T/m} \cdot l$.

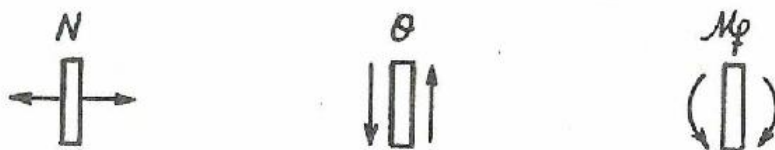
Determinemos las reacciones estableciendo el equilibrio de fuerzas y momentos:



$$H = 0; \quad V = P \cdot l$$

$$\text{Tomando momentos en A; } M = P \cdot l \cdot \frac{1}{2} = P \frac{l^2}{2}$$

Consideramos una sección a distancia x del empotramiento y tomamos como esfuerzos positivos los siguientes:



Operando por esfuerzos frontales, tenemos:

$$N = 0$$

$$Q = - P (l - x)$$

$$M_f = P (l - x) \frac{l - x}{2} = P \frac{(l - x)^2}{2}$$

Operando por esfuerzos dorsales:

$$N = 0$$

$$Q = -V + Px = -Pl + Px = -P(l-x)$$

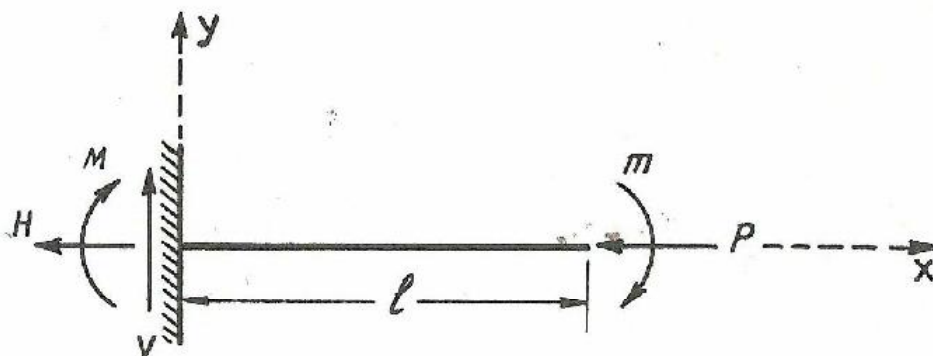
$$M_f = M - Vx + Px \frac{x}{2} = P \frac{l^2}{2} - Plx + P \frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{P}{2} (l^2 - 2lx + x^2) = P \frac{(l-x)^2}{2}$$

Las representaciones son las siguientes:



6. - Calcular las reacciones y leyes de esfuerzos de la estructura.

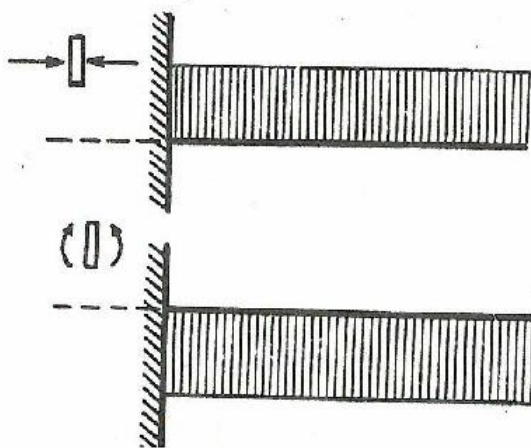


Reacciones:

$$H = -P ; V = 0 ; M = -m.$$

Consideremos esfuerzos positivos:

$$\rightarrow \boxed{\leftarrow} N \quad \downarrow \uparrow Q \quad (\curvearrowright) M_f$$



Axiles:

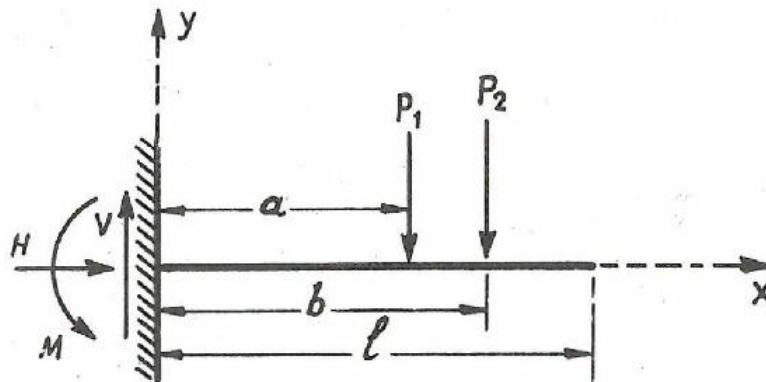
$$N_o^l = P$$

Cortantes:

$$Q_o^l = 0$$

Flectores: $M_{f_o}^l = -m.$

7. - Calcular las reacciones y leyes de esfuerzos en la siguiente estructura:



Reacciones:

$$H = 0 ; \quad V = P_1 + P_2 ; \quad M = P_1 a + P_2 b$$

Consideremos esfuerzos positivos:



Axiles:

$$N_o^l = 0$$

Cortantes:

$$Q_b^l = 0$$

$$Q_a^b = P_2$$

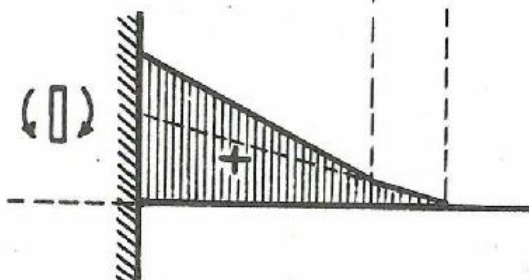
$$Q_o^a = P_1$$

Flectores:

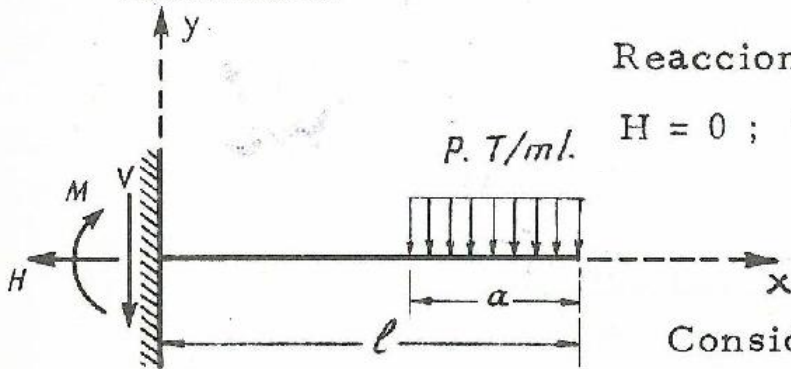
$$M_b^l = 0$$

$$M_{f_a}^b = P_2(b-x)$$

$$M_{f_o}^a = P_2(b-x) + P_1(a-x)$$



8. Calcular las reacciones y leyes de esfuerzo en la siguiente estructura:



Reacciones:

$$H = 0 ; V = - p \cdot a ;$$

$$M = - p \cdot a \left(l - \frac{a}{2} \right)$$

Consideremos esfuerzos positivos:

$$\leftarrow \boxed{} \rightarrow N \quad \downarrow \boxed{} \uparrow Q \quad \left(\boxed{} \right) M$$

Axiles:

$$N_O^l = 0$$

Cortantes:

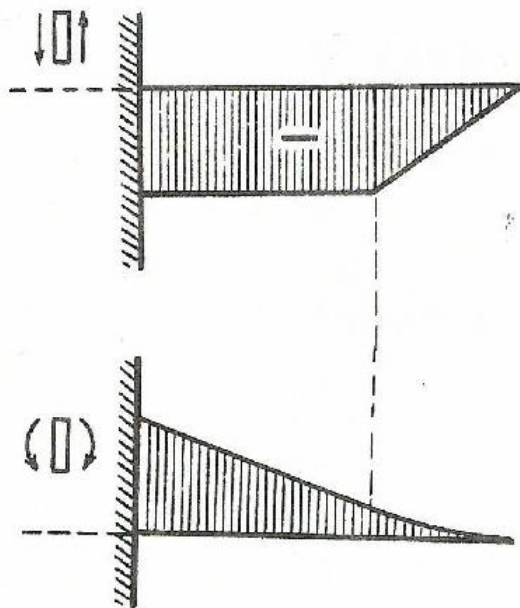
$$Q_{l-a}^l = - p (l - x)$$

$$Q_O^{l-a} = - p (l - a)$$

Flectores:

$$M_{f_{l-a}}^l = p \frac{(l-x)^2}{2}$$

$$M_{f_O}^{l-a} = pa \left(l - \frac{a}{2} \right)$$



- o -

9. - La ménsula adjunta está sometida a las cargas que se indican.

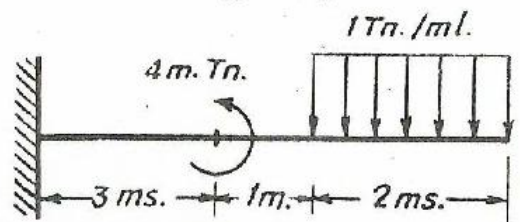
Determinar las leyes de M_f y Q .

A. - Leyes de M_f

a) $0 \leq x \leq 3$

$$M_f = +4 - 2(5-x) = 2x - 6;$$

(recta)



$$x = 0; M_f = - 6$$

$$x = 3; M_f = 0$$

b) $3 \leq x \leq 4$

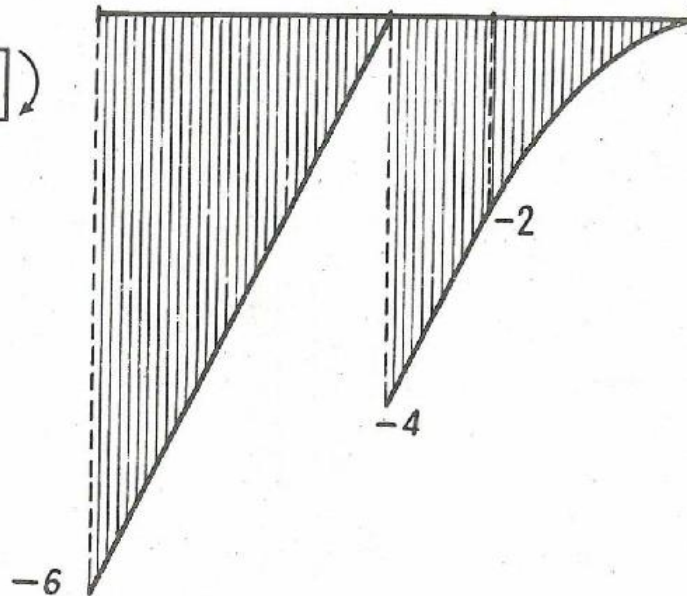
$$M_f = -2(5-x) = 2x - 10; \quad \begin{array}{|l} x=3; M_f = -4 \\ x=4; M_f = -2 \end{array}$$

(recta)

c) $4 \leq x \leq 6$

$$M_f = -\frac{1}{2}(6-x)^2 = -\frac{1}{2}(36 - 12x + x^2); \quad \begin{array}{|l} x=4; M_f = -2 \\ x=6; M_f = 0 \end{array}$$

(parábola)



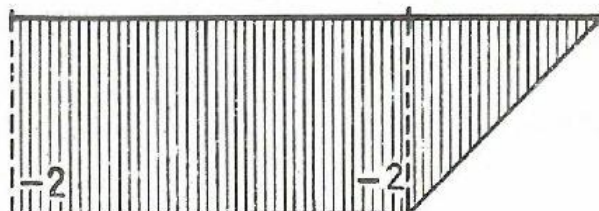
B. Leyes cortantes.

a) $0 \leq x \leq 4$

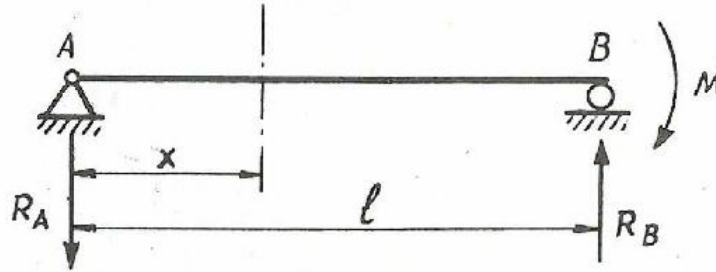
$$Q = -2$$

b) $4 \leq x \leq 6$

$$Q = -(6-x); \quad \begin{array}{|l} x=4; Q = -2 \\ x=6; Q = 0 \end{array}$$



10. Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos de una viga articulada y apoyada con un momento en el extremo.



Reacciones:

Tomando momentos en B.

$$- M + R_A \cdot l = 0 \rightarrow R_A = \frac{M}{l} \quad R_B = - R_A = - \frac{M}{l}$$

Consideremos una sección a una distancia x de la articulación y tomemos como esfuerzos positivos los siguientes:



Operando por esfuerzos frontales.

$$N = 0$$

$$Q = R_B$$

$$M_f = M - R_B(l - x) = M - R_B l + R_B x = + R_B x$$

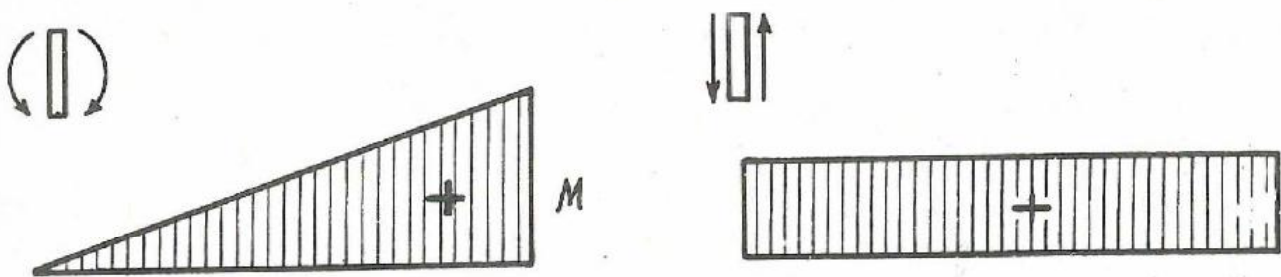
Operando con esfuerzos dorsales.

$$N = 0$$

$$Q = R_A$$

$$M_f = R_A \cdot x$$

Las representaciones son las siguientes:



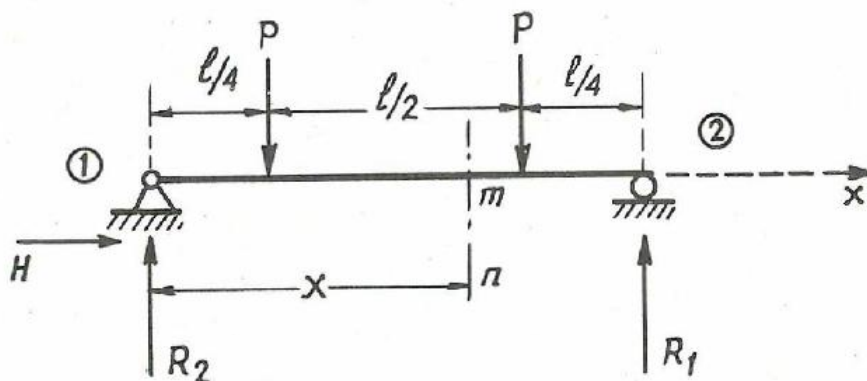
Si la viga hubiera sido biarticulada, evidentemente sería hiperestática; las ecuaciones de equilibrio nos determinarían R_1 y R_2 y nos expresarían que las reacciones horizontales son iguales y de sentido contrario, pero no obtendremos el valor de H de éstas.



Admitiremos a partir de ahora (posteriormente lo demostraremos) que cuando las fuerzas actuantes son normales a la directriz o bien cuando se trata de pares o cualquier sollicitación que no produzca deformaciones longitudinales dichas reacciones son nulas.

-o-

11. Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en una viga articulada y apoyada sometida a dos fuerzas según el esquema indicado en la figura.



Estableciendo las condiciones de equilibrio, tenemos:

$$H = 0$$

Tomando momentos en (1) $R_1 \cdot l = P \frac{3l}{4} + P \frac{l}{4}$, $R_1 = P$.

Tomando momentos en (2) $R_2 \cdot l = P \cdot \frac{3l}{4} + P \frac{l}{4}$; $R_2 = P$

Consideramos una sección m n a distancia x del apoyo (1) y tomamos unos esfuerzos positivos:



Operando con fuerzas frontales, tenemos:

$$N = 0$$

las leyes de Q y de M_f tienen tres leyes distintas por la discontinuidad que producen las cargas puntuales P.

Para esfuerzos cortantes, tenemos:

$$\text{entre } \frac{3l}{4} \text{ y } l \quad Q = R_1 = P$$

$$\text{entre } \frac{l}{4} \text{ y } \frac{3l}{4} \quad Q = R_1 - P = P - P = 0$$

$$\text{entre } 0 \text{ y } \frac{l}{4} \quad Q = R_1 - 2P = P - 2P = -P$$

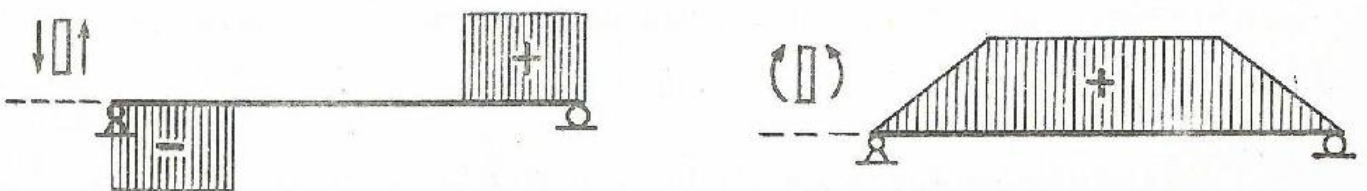
Para momentos flectores

$$\text{entre } \frac{3l}{4} \text{ y } l ; \quad M_f = R_1 (l - x) = P (l - x)$$

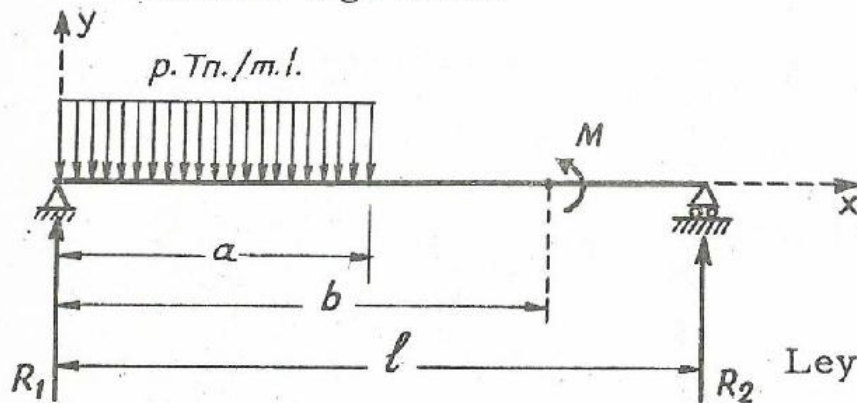
$$\text{entre } \frac{l}{4} \text{ y } \frac{3l}{4} ; \quad M_f = R_1 (l - x) - P \left(\frac{3l}{4} - x \right) = P \left(l - x - \frac{3l}{4} + x \right) = P \frac{l}{4}$$

$$\text{entre } 0 \text{ y } \frac{l}{4} ; \quad M_f = R_1 (l - x) - P \left(\frac{3l}{4} - x \right) - P \left(\frac{l}{4} - x \right) = Px$$

La representación gráfica es la indicada en las figuras.



12. Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en la estructura siguiente:



Reacciones:

$$R_1 = \frac{1}{l} \left[P \cdot a \frac{2l-a}{2} + M \right]$$

$$R_2 = \frac{1}{l} \left[P \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M \right]$$

Ley de momentos flectores:

$$M_f|_0^a = \frac{x}{l} \left[P \cdot a \frac{2l-a}{2} + M \right] - P \frac{x^2}{2}$$

$$M_f|_0^b = \frac{x}{l} \left[P a \frac{2l-a}{2} + M - P a \left(x - \frac{a}{2} \right) \right]$$

$$M_f|_b^l = \frac{l-x}{l} \left[P \cdot a \frac{a}{2} - M \right]$$

$$M_{f_a} = P a^2 \frac{l-a}{2l} + \frac{M a}{l}$$

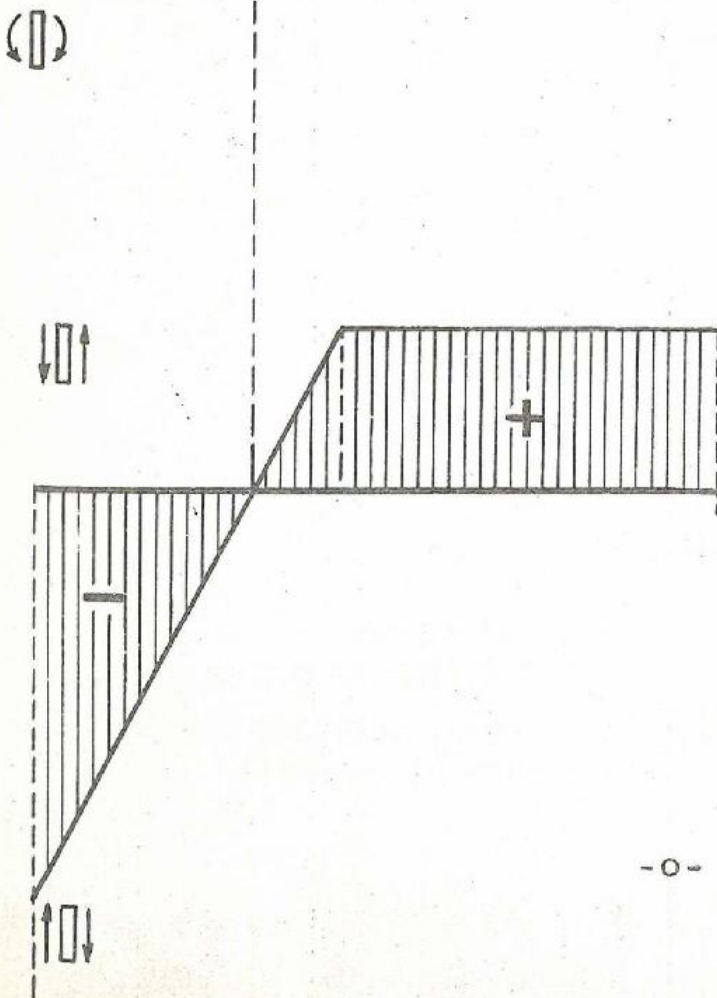
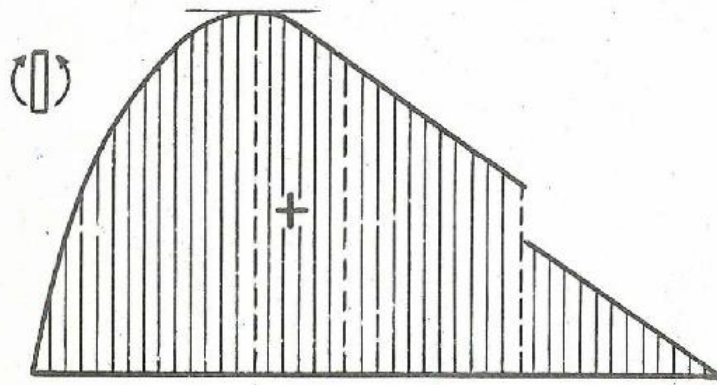
$$M_{f_b} = \begin{cases} \frac{P a^2}{2l} (l-b) + \frac{M b}{l} \\ \frac{P a^2}{2} (l-b) + \frac{M b}{l} - M \end{cases}$$

Ley de esfuerzos cortantes

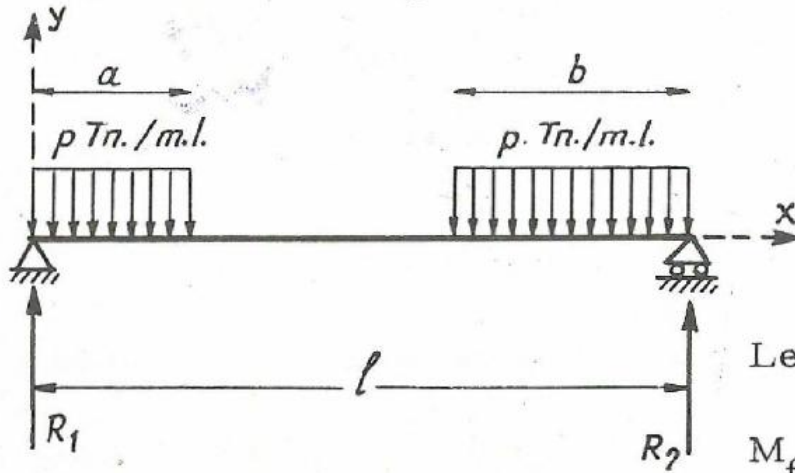
$$Q|_0^a = -\frac{1}{l} \left[\left(P a \frac{2l-a}{2} + M \right) + P x \right]$$

$$Q|_a^b = \frac{1}{l} \left[P a \frac{2l-a}{2} + M \right] + P a$$

$$Q|_b^l = \frac{1}{l} \left[P \frac{a^2}{2} - M \right]$$



13. Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en la estructura de la figura.



Reacciones:

$$R_1 = \frac{P}{l} \left[a l - \frac{a^2 - b^2}{2} \right]$$

$$R_2 = \frac{P}{l} \left[b l - \frac{b^2 - a^2}{2} \right]$$

Ley de momentos flectores.

$$M_f|_0^a = \frac{P x}{l} \left[a l - \frac{a^2 - b^2}{2} \right] - \frac{P}{2} x^2$$

$$M_f|_a^b = \frac{P x}{l} \left[a l - \frac{a^2 - b^2}{2} \right] - P a \left(x - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_f|_b^l = \frac{P x}{l} \left[b l - \frac{b^2 - a^2}{2} \right] - \frac{P}{2} (l - x)^2$$

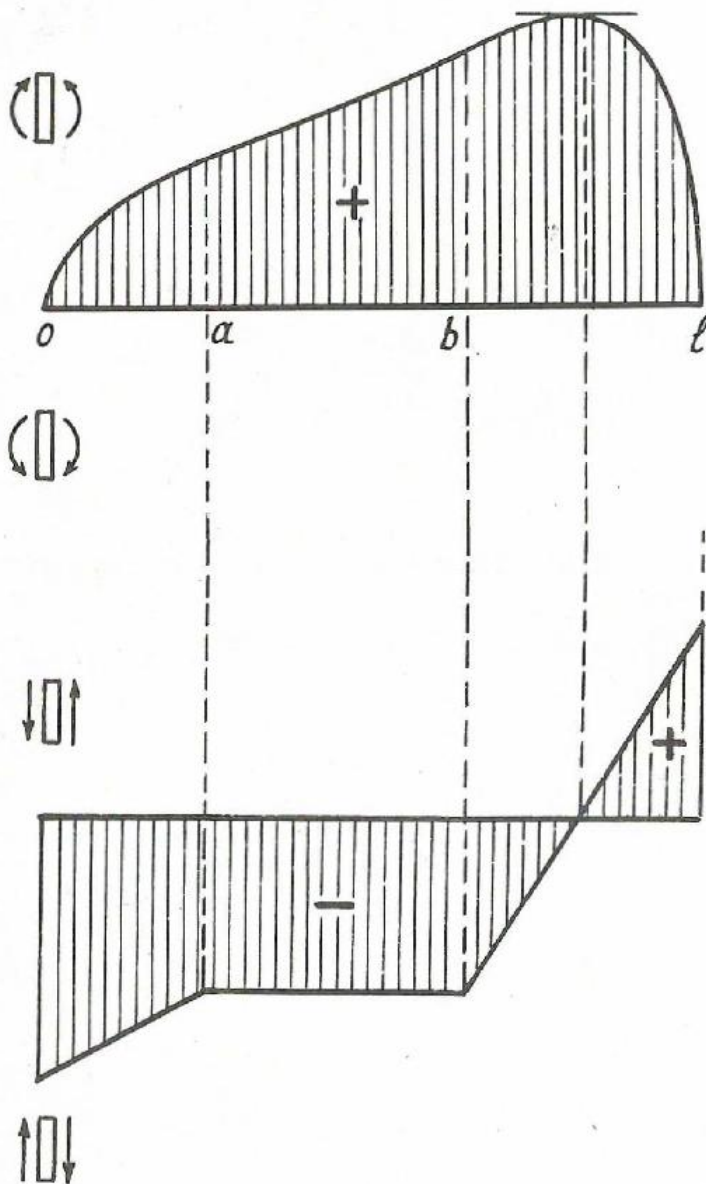
Ley de esfuerzos cortantes.

$$Q|_0^a = - \frac{P}{l} \left[a l - \frac{a^2 - b^2}{2} \right] + P x$$

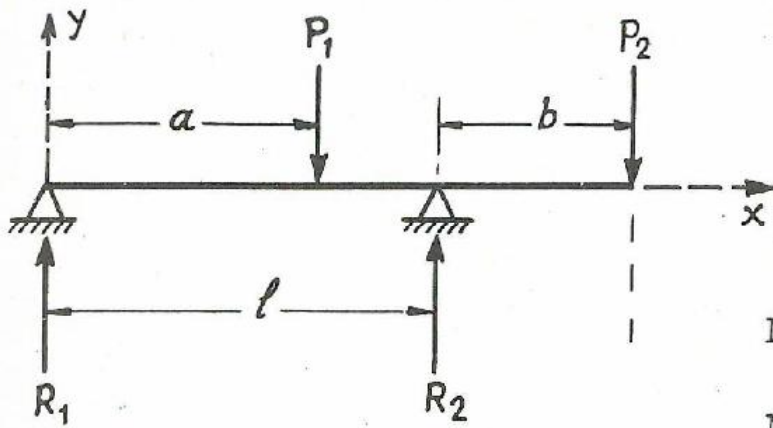
$$Q|_a^b = - \frac{P}{l} \left[a l - \frac{a^2 - b^2}{2} \right] = P \cdot a$$

$$Q|_b^l = \frac{P}{l} \left[b \cdot l - \frac{b^2 - a^2}{2} \right] + P(l - x)$$

-o-



15. - Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos cortantes en la siguiente estructura:



Reacciones:

$$R_1 = \frac{1}{l} [P_1 (\ell - a) - P_2 b]$$

$$R_2 = \frac{1}{l} [P_1 a + P_2 (\ell + b)]$$

Momentos flectores.

$$M_{f_0}^a = + \frac{x}{l} [P_1 (\ell - a) - P_2 b]$$

$$M_{f_a}^\ell = \frac{x}{l} [P_1 (\ell - a) - P_2 b] - P_1 (x - a) =$$

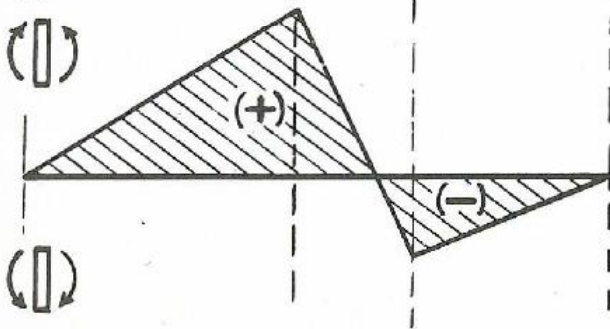
$$= - \frac{x}{l} (P_1 a + P_2 b) + P_1 a$$

$$M_{f_\ell}^{\ell+b} = - P_2 (\ell + b - x)$$

$$M_a = P_1 a - \frac{a}{l} (P_1 a + P_2 b)$$

$$M_\ell = P_1 a - P_1 a - P_2 b - P_2 b$$

Ley de $M\phi$



Cortantes.

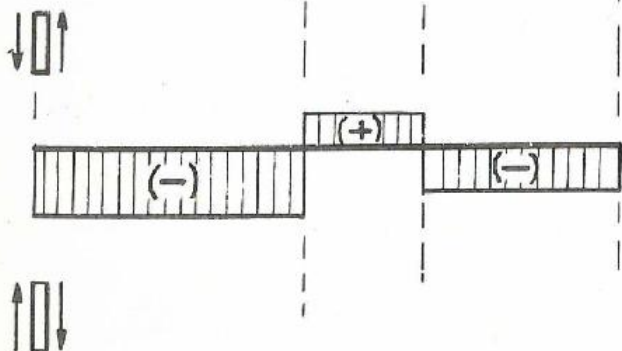
$$Q|_b^a = - \frac{1}{l} [P_1 (\ell - a) - P_2 b]$$

$$Q|_a^\ell = P_1 - \frac{1}{l} [P_1 (\ell - a) - P_2 b] =$$

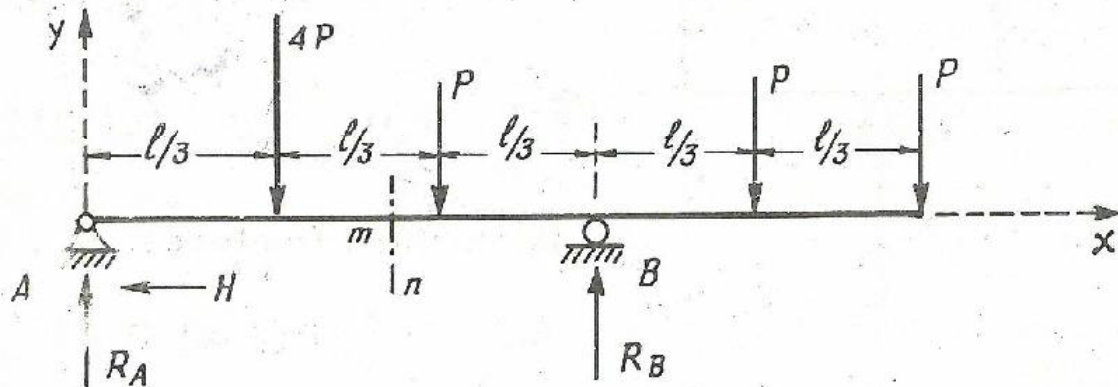
$$= \frac{P_1 a + P_2 b}{l}$$

$$Q|_\ell^{\ell+b} = - P_2$$

Ley de Q



15. - Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos de la estructura indicada en la figura.



Reacciones.

$$H = 0.$$

Tomando momentos en A. $R_B \cdot l = 4P \cdot \frac{l}{3} + 3P \cdot \frac{l}{3}$; $R_B = 5P$.

$$R_A + R_B = 7P; \quad R_A = 2P.$$

Consideremos esfuerzos positivos los siguientes:



Calculando por esfuerzos frontales, tendremos:

Axiles

$$N_o^{5l/3} = 0$$

Cortantes

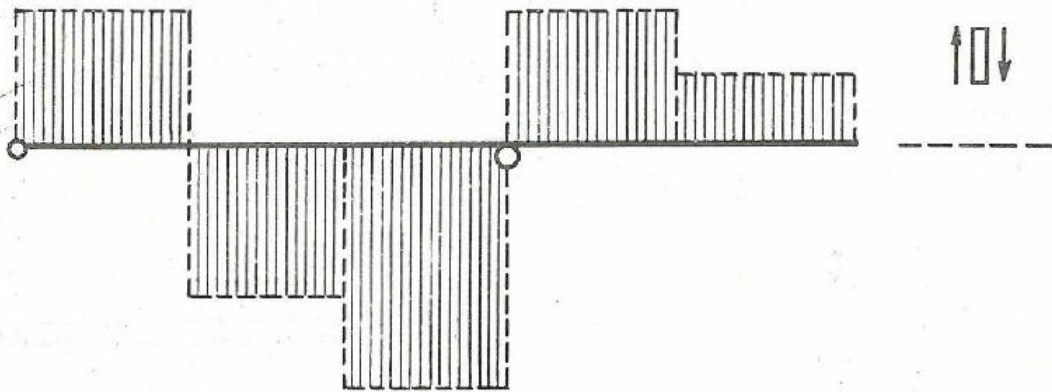
$$Q_{4l/3}^{5l/3} = P$$

$$Q_l^{4l/3} = 2P$$

$$Q_{2l/3}^l = 2P - R_B = -3P.$$

$$Q_{l/3}^{2l/3} = 2P - R_B + P = -2P.$$

$$Q_o^{l/3} = 2P - R_B + P + 4P = 2P.$$



Flectores.

$$M_{f_{4l/3}}^{5l/3} = P\left(\frac{5l}{3} - x\right).$$

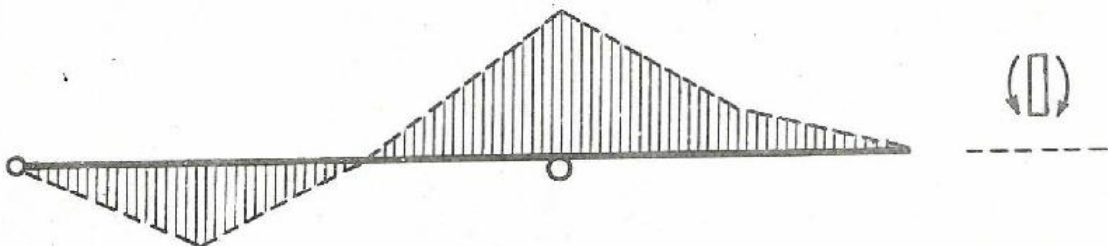
$$M_{f_l}^{4l/3} = P\left(\frac{5l}{3} - x\right) + P\left(\frac{4l}{3} - x\right) = P(3l - 2x)$$

$$M_{f_{2l/3}}^l = P(3l - 2x) - R_B(l - x) = P(3x - 2l)$$

Al llegar al intervalo siguiente, observamos que la determinación del M_f por consideración de las fuerzas frontales, nos obliga a considerar cuatro de ellas mientras que si operásemos por esfuerzos dorsales solo consideraríamos dos, facilitándose su cálculo. Tendremos entonces:

$$M_{f_0}^{l/3} = -R_A \cdot x = -2Px$$

$$M_{f_{l/3}}^{2l/3} = -2Px + 4P\left(x - \frac{l}{3}\right) = P\left(2x - \frac{4l}{3}\right)$$

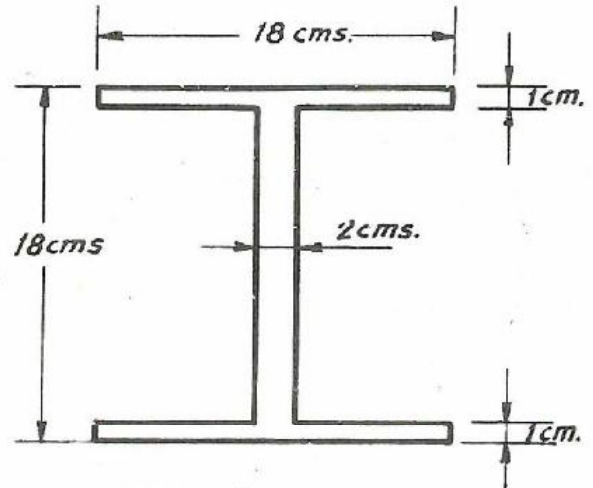
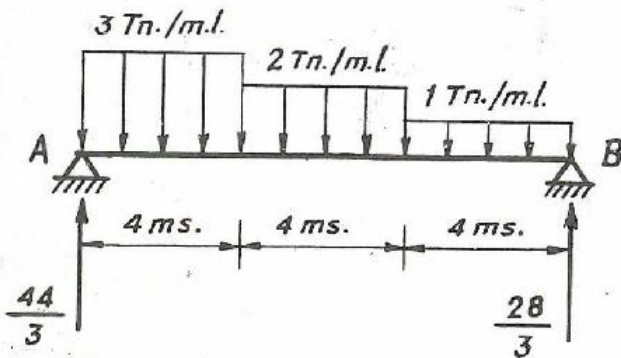


16. - En la estructura adjunta se pide:

1º. Leyes de M_f y Q .

- 2º. Distribución de tensiones normales en el punto M_f máximo.
 3º. Distribución de tensiones tangenciales en la sección de la viga en la que Q sea máximo.

La sección de la viga es la doble T indicada.



Determinemos las reacciones:

$$24 + 48 + 40 = 12 R_B \rightarrow R_B = \frac{112}{12} = \frac{28}{3}$$

$$8 + 48 + 120 = 12 R_A \rightarrow R_A = \frac{176}{12} = \frac{44}{3}$$

1º. Leyes de M_f

a) $0 \leq x \leq 4$

$$M_f = \frac{44}{3}x - 3 \frac{x^2}{2} ; \begin{cases} x = 0 & ; M_f = 0 \\ x = 4 & ; M_f = \frac{104}{3} = 34,66 \end{cases}$$

b) $4 \leq x \leq 8$

$$M_f = \frac{44}{3}x - 12(x-2) - (x-4)^2 = \frac{8}{3}x + 24 - (x-4)^2$$

$$x = 4 ; M_f = \frac{104}{3} = 34,66$$

$$x = 8 ; M_f = \frac{88}{3} = 29,33$$

$$x = 16 ; M_f = \frac{328}{9} = 36,44 \text{ (máximo)}$$

c) $8 \leq x \leq 12$

$$M_f = \frac{28}{3} (12-x) - \frac{(12-x)^2}{2} = (12-x) \left[\frac{28}{3} - 6 + \frac{x}{2} \right] =$$

$$= (12-x) \left[\frac{10}{3} + \frac{x}{2} \right]$$

$x = 8$; $M_f = 4 \times \left[\frac{10 + 12}{3} \right] = \frac{88}{3} = 29,33$

$x = 12$; $M_f = 0$

Leyes de cortantes.

a) $0 \leq x \leq 4$

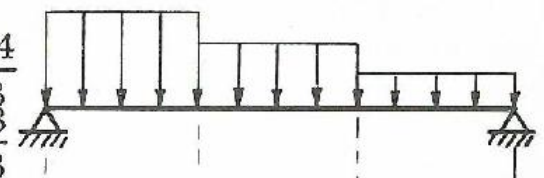
$$Q = -\frac{44}{3} + 3x = \frac{1}{3} (9x - 44)$$

$x = 0$;

$Q = -\frac{44}{3}$

$x = 4$;

$Q = -\frac{8}{3}$



b) $4 \leq x \leq 8$

$$Q = -\frac{44}{3} + 12 + 2(x-4) =$$

$$= 2x - \frac{32}{3}$$

$x = 4$; $Q = -\frac{8}{3}$

$x = 8$; $Q = +\frac{16}{3}$

$x = \frac{16}{3} = 5,33$; $Q = 0$

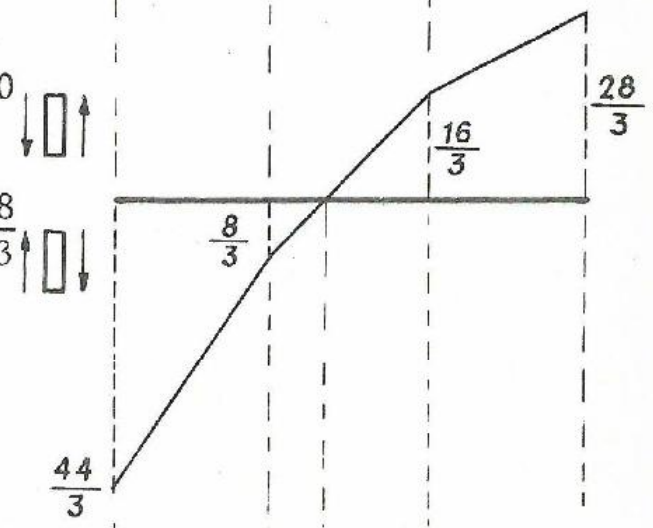
Leyes de Q

c) $8 \leq x \leq 12$

$$Q = \frac{28}{3} - (12-x) = x - \frac{8}{3}$$

$x = 8$; $Q = \frac{16}{3}$

$x = 12$; $Q = \frac{28}{3}$



2. El máximo valor de M_f es $\frac{328}{9}$

El momento de inercia vale:

$$I = \frac{2}{3} [2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 18 \cdot 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 18 \cdot 1 \cdot 8 + 18 \cdot 1] =$$

$$= \frac{2}{3} 4930 = 3286,66 \approx 3280 \text{ cm}^4.$$

Entonces:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{M_f \cdot y}{I} = \frac{\frac{328}{9} \cdot 10^5 \cdot \phi}{3280} = 10.000 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

3. El máximo valor de Q es $-\frac{44}{3}$

La tensión cortante es máxima en el centro de gravedad y vale:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Q M_e}{I a_y} \text{ para } y = 0$$

a) $M_e = \frac{18 \cdot 1}{2} 17 + 1 \cdot (64 - 0) = 153 + 64 = \underline{\underline{217 \text{ cm}^3}}$

$$Q = -\frac{44}{3} \cdot 10^3 \text{ Kgrs.}$$

$$I = 3280 \text{ cms}^4.$$

$$a_y = 2 \text{ cms.}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\frac{44}{3} \cdot 10^3 \cdot 217}{2 \times 3280} = 485,16 \text{ Kg/cm}^2$$

b) Para $y = 8$

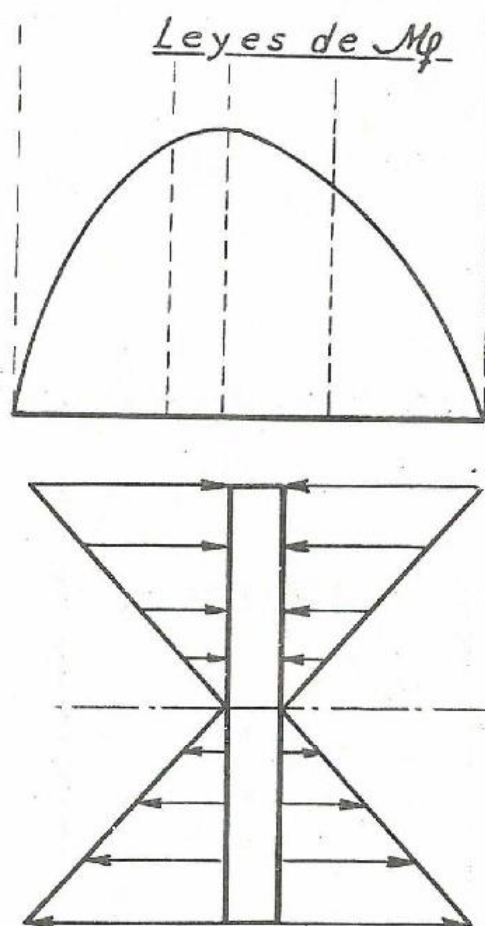
$$M_e = 153 + 56 = 209$$

$$\frac{44}{3} \cdot 10^3 \cdot 209$$

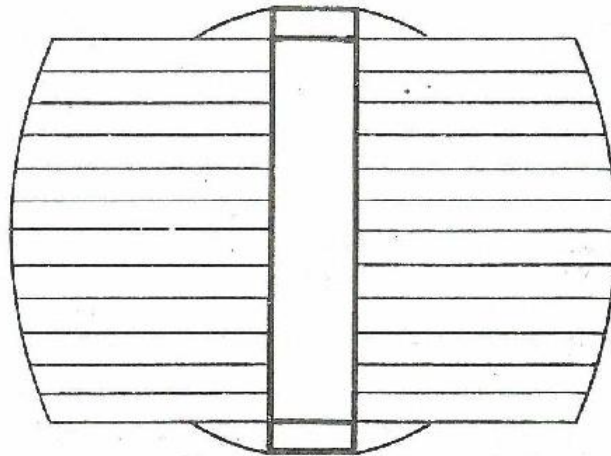
$$\tau_1 = \frac{\frac{44}{3} \cdot 10^3 \cdot 209}{2 \times 3260} = 467,27 \text{ Kgr/cm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{467,27}{9} = 51,92 \text{ Kg/cm}^2$$

c) Para $y = 9$; $\tau = 0$.

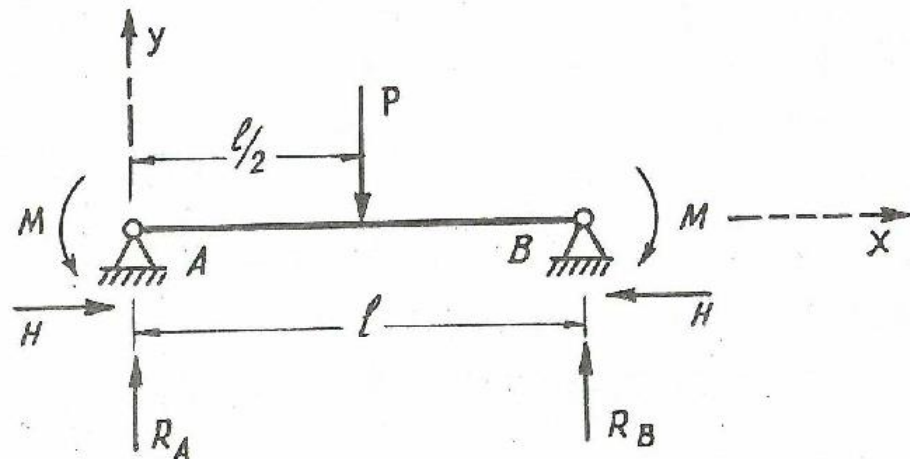


Ley de cortantes:



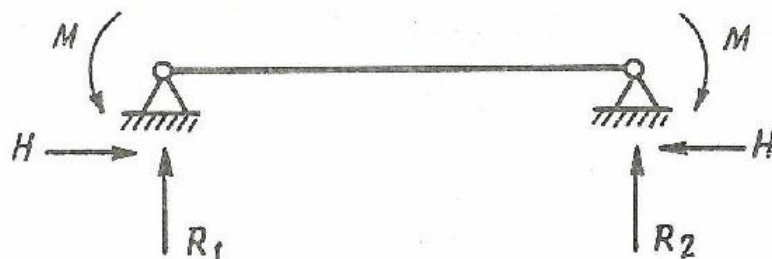
-o-

17. Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en la estructura indicada en la figura, aplicando el principio de superposición de efectos.



Descomponemos el estado de cargas en los dos siguientes:

Estado I



$$R_1 = R_2 = 0$$

$H = 0$, como indicamos anteriormente que se producía con esta sollicitación.

Consideremos esfuerzos positivos:



Tendremos entonces:

$$Q = 0 ; N = 0 ; M_f = M$$

Estado II



Reacciones:

$$H = 0$$

$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

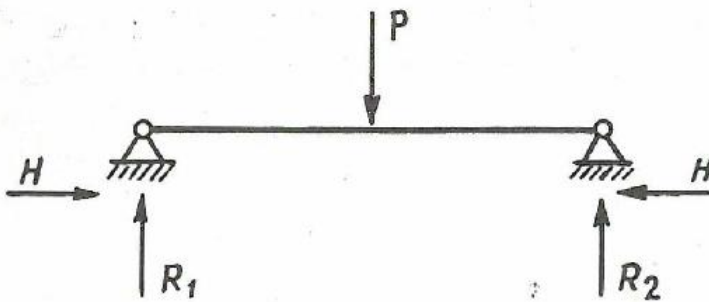
Esfuerzos:

$$M_{f \frac{l}{2}}^l = -R_2(l-x) = -\frac{P}{2}(l-x).$$

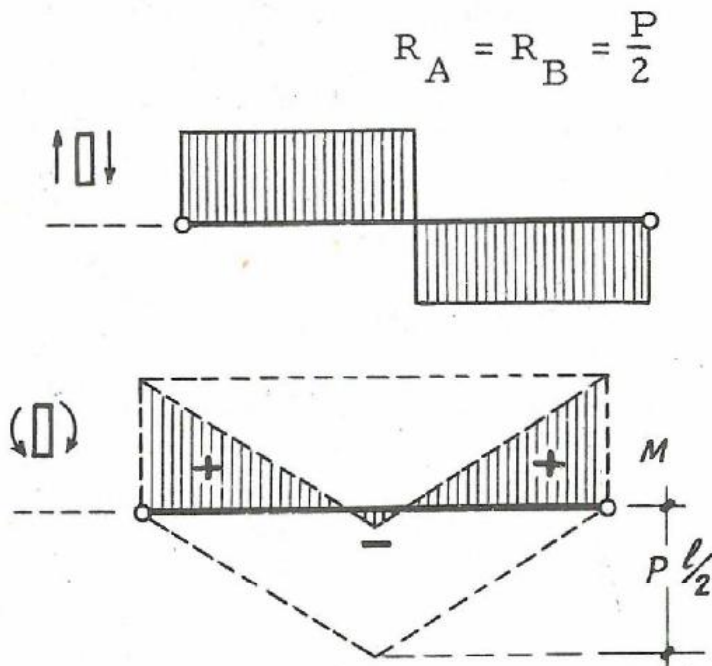
$$M_{f_0}^{\frac{l}{2}} = -R_2(l-x) + P\left(\frac{l}{2}-x\right) = -\frac{Px}{2}$$

$$Q_{\frac{l}{2}}^l = -R_2 = -\frac{P}{2}$$

$$Q_0^{\frac{l}{2}} = -R_2 + P = \frac{P}{2}$$



Determinamos en el estado final los esfuerzos y reacciones como suma de las de los estados parciales.



$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$

$$H = 0$$

$$Q_{l/2}^l = -\frac{P}{2}$$

$$Q_0^{l/2} = \frac{P}{2}$$

$$M_{f\ l/2}^l = M - \frac{P}{2} (\ell - x)$$

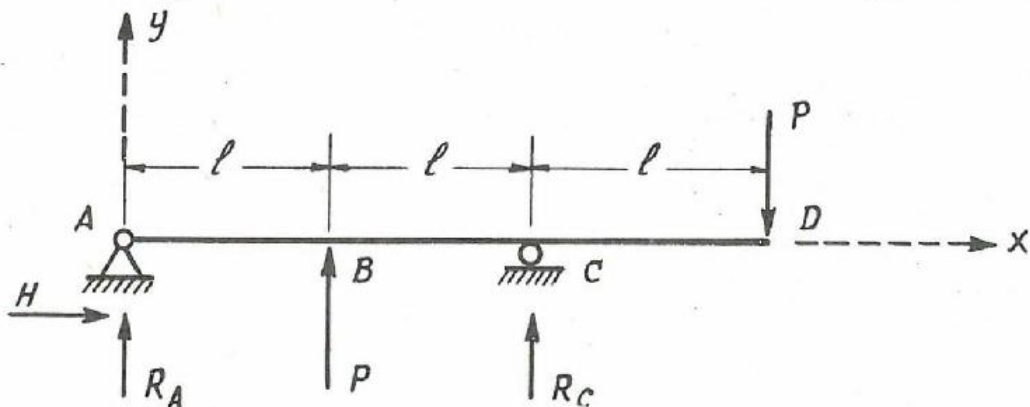
$$M_{f_0}^{l/2} = M - \frac{Px}{2}$$

Obsérvese que los momentos flectores del estado final podemos determinarlos gráficamente, sin más que elevar la ley de momentos del Estado II hasta la horizontal correspondiente a la ley del estado I.

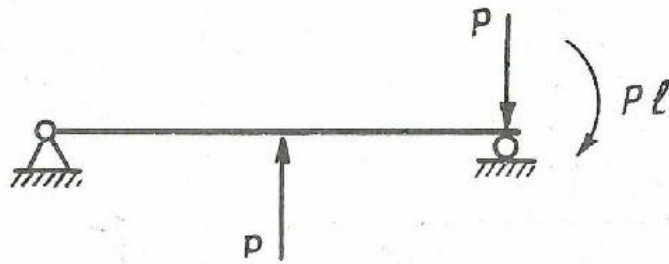
Estas superposiciones de las leyes de esfuerzos que en este caso no parecen tener mucha utilidad, se utilizan después con gran propensión en todo el cálculo de resistencia de materiales y de estructuras, razón por la que deben estudiarse detenidamente.

-o-

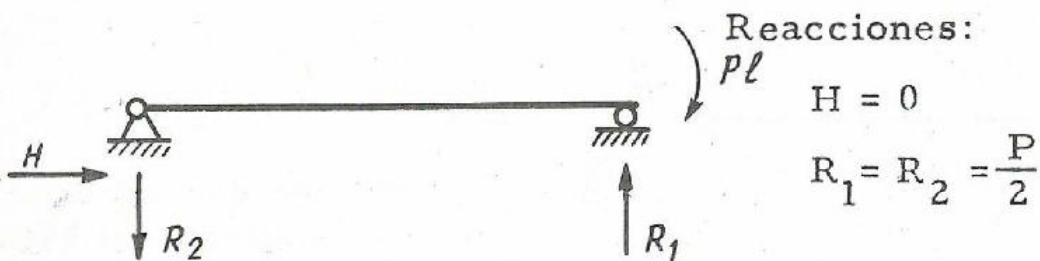
18. - Determinar por el principio de superposición de efectos - las reacciones y esfuerzos de la estructura siguiente:



La ménsula CD transmite al resto de la estructura, una fuerza vertical P y un par $P\ell$.



Consideremos como estado I la acción exclusiva del par.

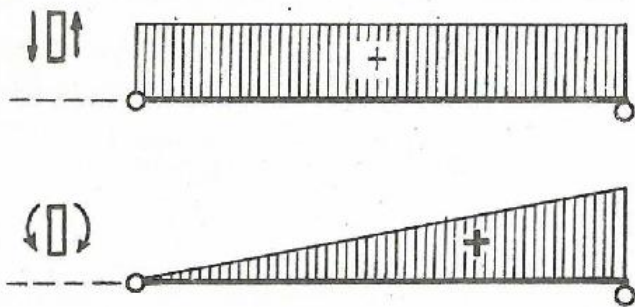


Reacciones:

$$H = 0$$

$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

Tomaremos como esfuerzos positivos.



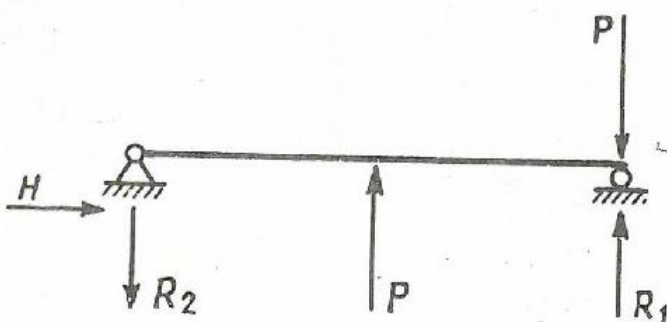
Tenemos entonces:

$$N_o^{2\ell} = 0$$

$$Q_o^{2\ell} = R_1 = \frac{P}{2}$$

$$M_{f_o}^{2\ell} = P\ell - R_1(l-x) = \frac{Px}{2}$$

Tomaremos como estado II, la acción de las restantes cargas.

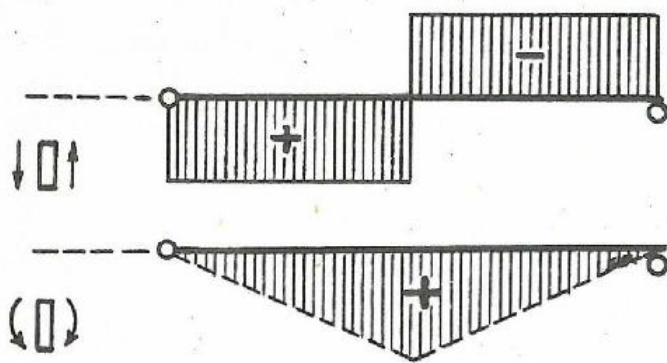


Reacciones:

$$H = 0 ; R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

Esfuerzos:

$$N_o^{2\ell} = 0$$



$$O_l^{2l} = R_1 - P = -\frac{P}{2}$$

$$O_o^l = R_1 = \frac{P}{2}$$

$$M_{f_l}^{2l} = \frac{P}{2}(2l - x)$$

$$M_{f_o}^l = \frac{P}{2}(2l - x) - P(l - x) = \frac{Px}{2}$$

Finalmente dentro de la ménsula tendremos las siguientes leyes de esfuerzos



$$N_{2l}^{3l} = 0$$

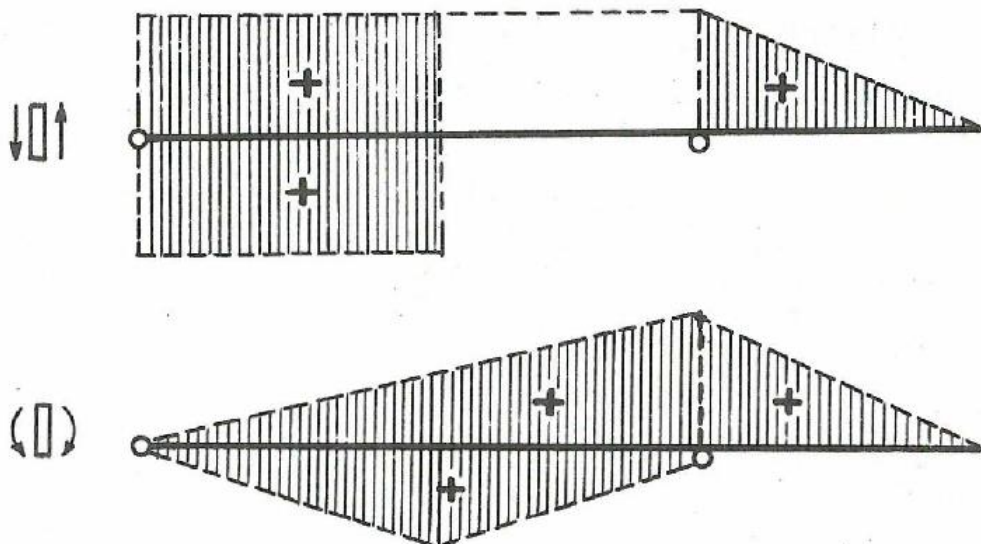
$$O_{2l}^{3l} = -P$$



$$P_{f_{2l}}^{3l} = P(3l - x)$$

Realizamos gráficamente la superposición de todos los estados considerados:

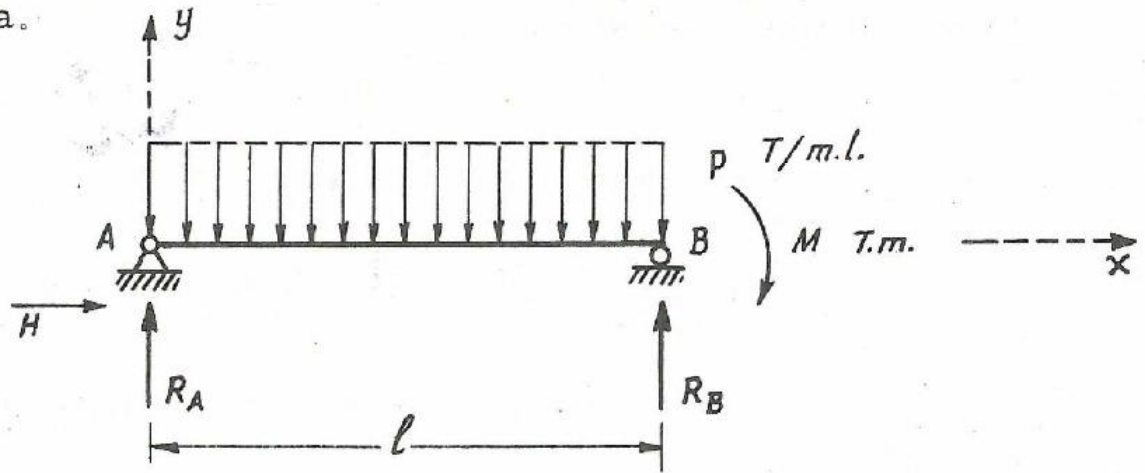
Esfuerzos:



La expresión algebraica se determina tomando las de los estados parciales de carga.

Reacciones: $R_A = -\frac{P}{2} ; R_C = \frac{P}{2}$

19. Determinar por el principio de superposición de efectos las reacciones y esfuerzos de la estructura indicada en la figura.



Consideremos como estado I



Reacciones:

$$H = 0$$

$$R_2 = -R_1 = \frac{M}{l}$$

Tomando esfuerzos positivos



tendremos:



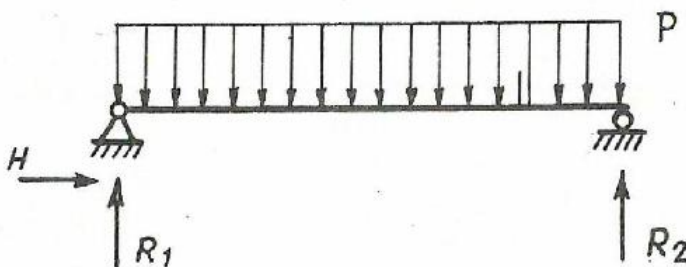
$$Q_0^l = R_2 = \frac{M}{l}$$



$$N_0^l = 0$$

$$M_{f_0}^l = M - R_2(l-x) = \frac{Mx}{l}$$

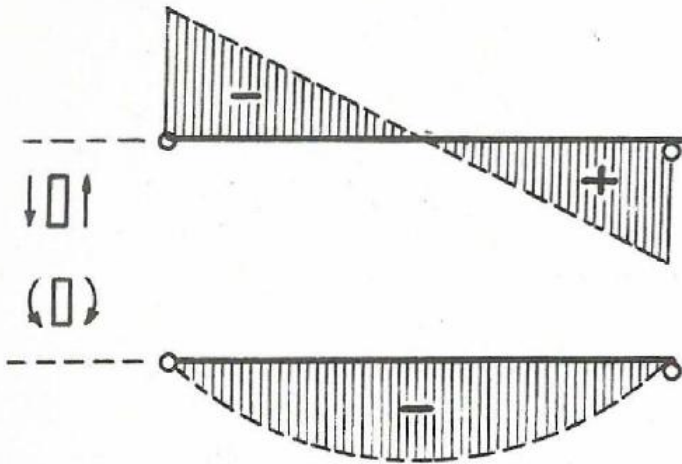
Tomemos como estado II



Reacciones:

$$H = 0$$

$$R_1 = R_2 = \frac{Pl}{2}$$



Esfuerzos:

$$Q_o^l = R_2 - P(l-x) = -P\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$N_o^l = 0$$

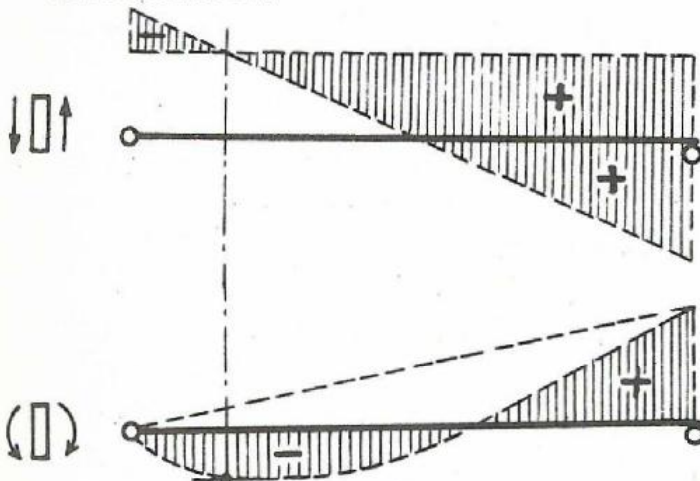
$$M_{f_o}^l = -R_2(l-x) + P\frac{(l-x)^2}{2} = -\frac{P}{2}x(l-x)$$

Determinaremos por superposición el estado final.

Reacciones:

$$H = 0 ; R_B = Ml + \frac{Pl}{2} ; R_A = \frac{Pl}{2} - Ml$$

Esfuerzos.



$$N_o^l = 0$$

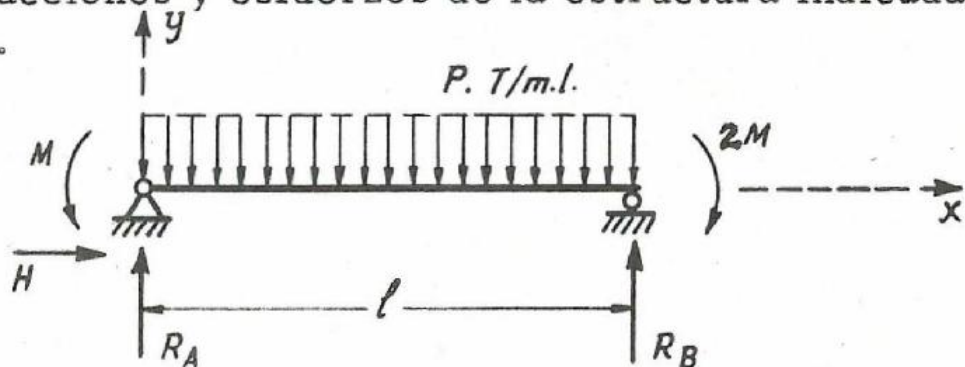
$$Q_o^l = \frac{M}{l} - \frac{P}{2}x(l-x)$$

$$M_{f_o}^l = \frac{Mx}{l} - \frac{P}{2}x(l-x)$$

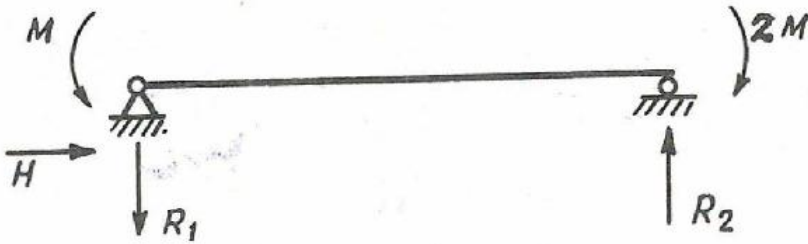
Tanto este caso como el que indicamos a continuación aparecen frecuentemente tanto en Resistencia de Materiales como en Estructuras.

-o-

20. Determinar por el principio de superposición de efectos - las reacciones y esfuerzos de la estructura indicada en la figura.



Consideremos como estado I



Reacciones:

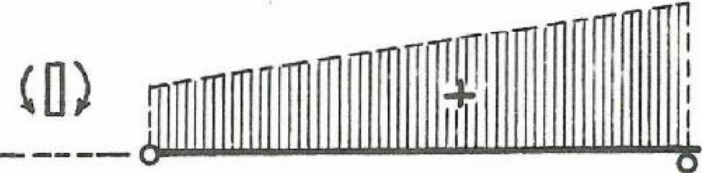
$$R_1 = R_2 = \frac{M}{l}$$

$$H = 0$$

Adoptaremos como esfuerzos positivos.



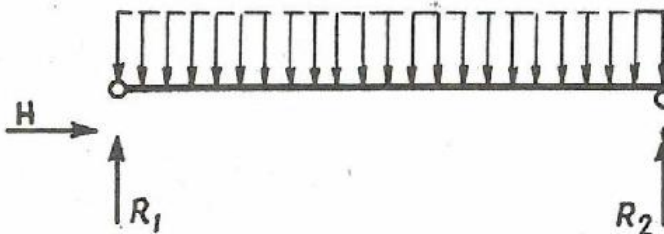
$$Q_o^l = R_2 = \frac{M}{l}$$



$$N_o^l = 0$$

$$M_{f_o} = 2M - R_2(l-x) = M + \frac{Mx}{l}$$

Consideremos como estado II



Reacciones:

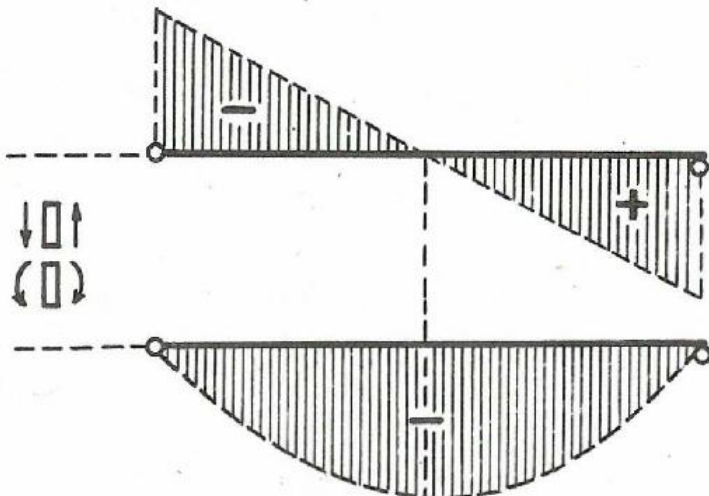
$$H = 0$$

$$R_1 = R_2 = \frac{Pl}{2}$$

Esfuerzos:

$$Q_o^l = R_2 - P(l-x) = -P\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

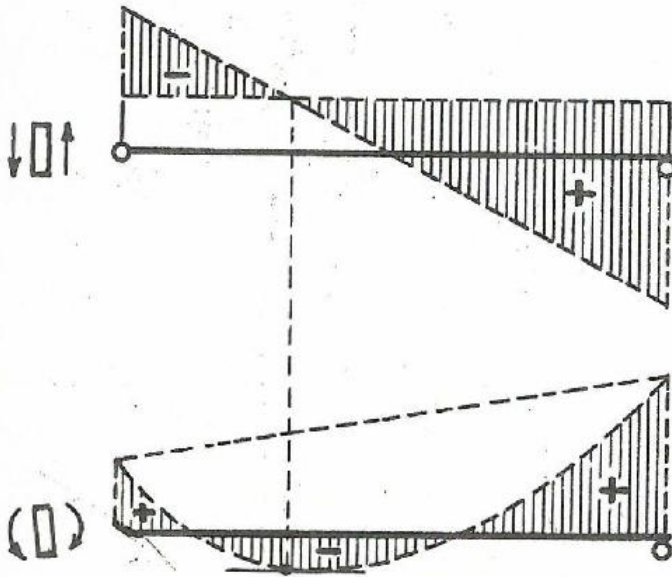
$$N_o^l = 0$$



$$M_{f_o}^l = -R_2(l-x) + P\frac{(l-x)^2}{2} = -\frac{P}{2}x(l-x)$$

Determinemos el estado final por superposición.

Reacciones: $H = 0$; $R_B = Ml + \frac{Pl}{2}$; $R_A = \frac{Pl}{2} - Ml$.



Esfuerzos:

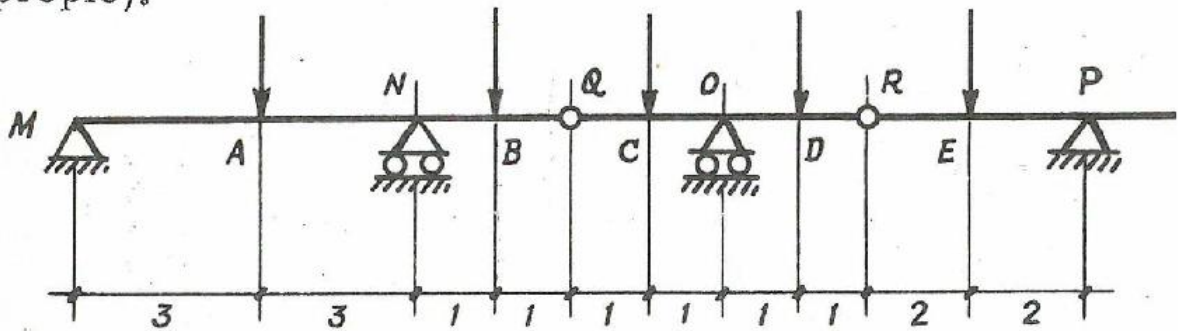
$$N_o^l = 0$$

$$Q_o^l = \frac{M}{l} - P \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

$$M_{fo}^l = M + \frac{Mx}{l} - \frac{P}{2} x (l - x)$$

- o -

21. - Determinar las reacciones en la viga de la figura para una carga unidad actuando sucesiva e independientemente en los puntos A, B, C, D y E (No se tiene en cuenta el peso propio).



A)

$$R_M = R_N = \frac{1}{2}$$

$$R_Q = R_P = 0$$

B) Tomando momentos en M.

$$1 \cdot 7 = R_N \cdot 6 \rightarrow R_N = \frac{7}{6}$$

$$R_M + \frac{7}{6} = 1 \rightarrow R_M = 1 - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6}$$

C) Tomando momentos en Q. $R_o = R_p = 0$

$$1 \cdot 1 R_o \cdot 2 \rightarrow R_o = \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta el efecto de la reacción en Q sobre la parte izquierda.

Tomando momentos en M:

$$\frac{1}{2} \cdot 8 = R_N \cdot 6 \rightarrow \underline{\underline{R_N = \frac{2}{3}}} \quad R_M = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \quad \underline{\underline{R_p = 0}}$$

D)

$$1 \cdot 1 = R_Q \cdot 2 \rightarrow R_Q = \frac{1}{2}$$

$$R_0 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

R_M y R_N igual que anteriormente pero de signos contrarios.

E)

$$R_P = \frac{1}{2}$$

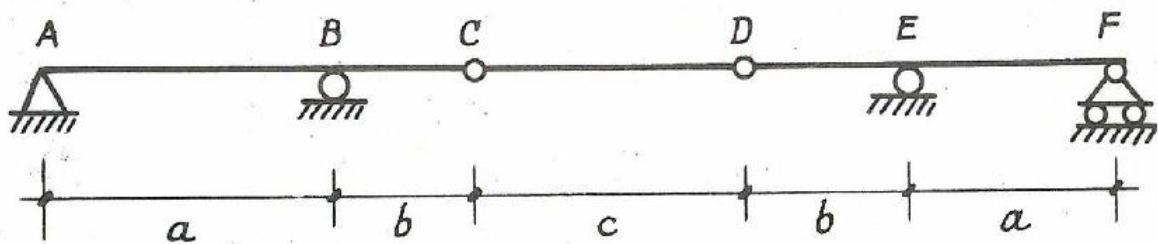
$$R_R = -\frac{1}{2} = R_Q \rightarrow R_0 = 1$$

R_M y R_N igual que en el caso C.

-o-

22. Determinar las reacciones en la viga representada para las hipótesis.

a) Carga unidad en el centro del tramo AB.



b) Carga unidad actuando en B.

c) " " " " C.

d) " " " " el centro de CD.

Nota: No se considera el peso propio.

Caso a):

Vamos a llamar R a las reacciones y le pondremos un

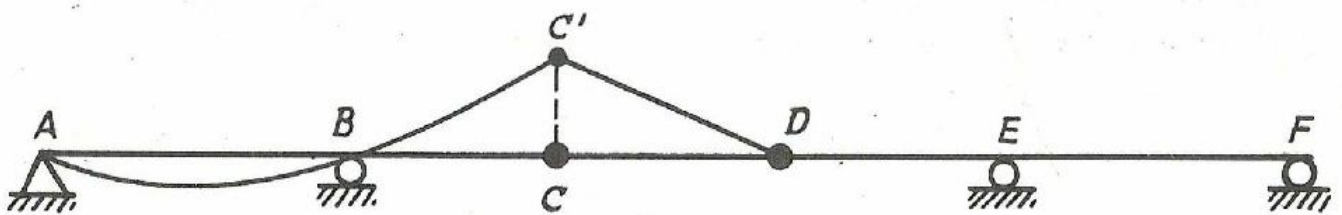
subíndice con la letra del apoyo en que actúa.

Tomando momentos en B, tenemos:

$$R_A \cdot a = 1 \cdot \frac{a}{2} \rightarrow R_A = \frac{1}{2} \text{ " análogamente } R_B = \frac{1}{2}$$

$$R_E \text{ y } R_F = 0$$

Para ver esto, basta con mirar la deformada y ver que el tramo CD se comporta como un mecanismo y por tanto, no nos



puede transmitir ningún esfuerzo a los apoyos E y F.

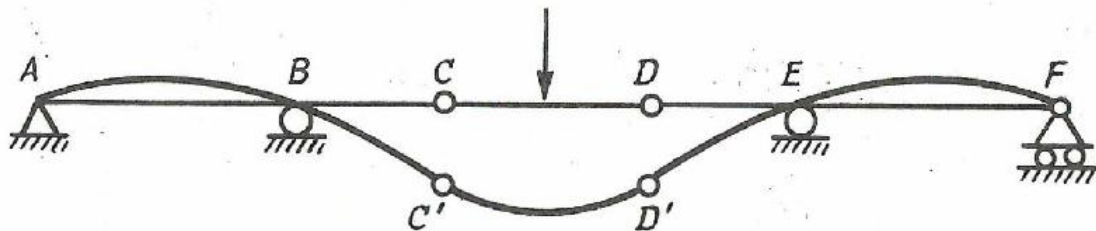
b) $R_A = R_E = R_F = 0 \rightarrow R_B = 1.$

c) Tomando momentos en A.

$$1(a + b) = R_B \cdot a \rightarrow R_B = \frac{a + b}{a}$$

$$R_A = -\frac{b}{a} \quad \text{"} \quad R_E = R_F = 0$$

d) Veamos la deformada.



Nota: En los puntos C' y D' en general la elástica tendrá una discontinuidad.

Esta deformada nos indica que existen reacciones en los 4 apoyos.

La fuerza unidad la descomponemos en 2 fuerzas actuando en

C y D, luego:

$$R_C = R_D = \frac{1}{2}$$

por estar actuando la carga unidad en el centro del vano; si no estuviera actuando en el centro del vano $R_C \neq R_D$, el cálculo se haría tomando momentos y se seguiría de igual manera. No olvidemos que R_C y R_D son fuerzas inferiores del sistema, y que estamos poniendo la acción del tramo CD sobre el resto de la viga.

Entonces nos encontramos en el caso anterior y basta poner $\frac{1}{2}$ donde pone 1 y obtenemos:

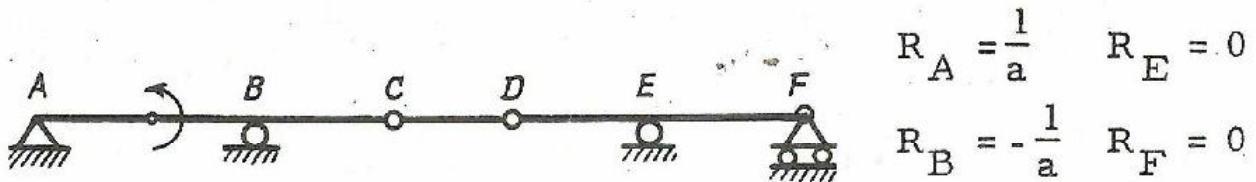
$$R_B = R_E = \frac{a+b}{2a}$$

$$R_A = R_F = -\frac{b}{2a}$$

-o-

23. - Resolver el problema anterior, sustituyendo la carga por un momento unidad.

Caso a). Momento unidad en el centro del tramo AB.



Basta tomar momentos y se observa que las reacciones son independientes del punto de actuación del momento dentro del tramo AB.

b) $R_A = \frac{1}{a} \quad " \quad R_B = -\frac{1}{a} \quad " \quad R_E = R_F = 0$

c) $R_A = \frac{1}{a} \quad " \quad R_B = -\frac{1}{a} \quad " \quad R_E = R_F = 0$

d) Descomponemos el momento en un par de fuerzas que actúen en C y D.

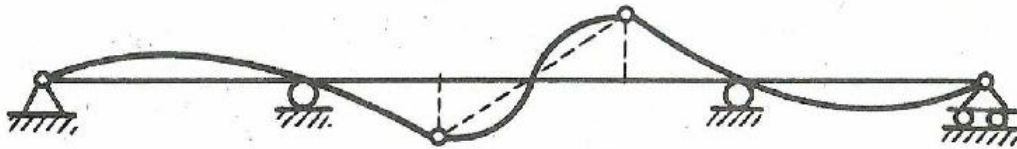
El momento es equivalente a $R_D = +\frac{1}{c} \quad " \quad R_C = -\frac{1}{c}$ y estamos en el caso d del problema anterior.

Operando, obtenemos:

$$R_B = -R_E = \frac{a+b}{c \cdot a}$$

$$R_A = -R_F = -\frac{b}{ca}$$

La deformada en este caso es:

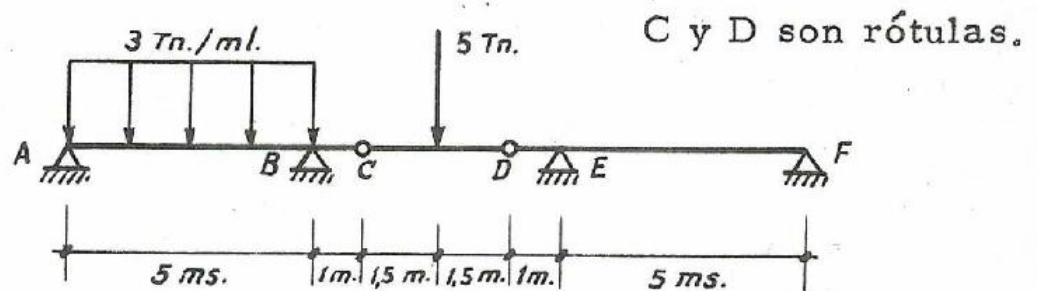


-0-

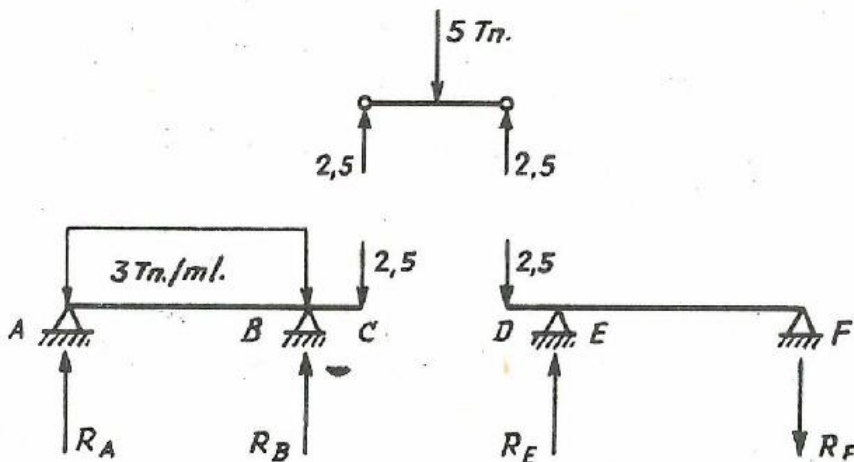
24. - En la viga de la figura obtener:

1º. Las reacciones de los apoyos.

2º. Las leyes de M_f y Q a lo largo de la viga.



Separamos los tres tramos y los calculamos por separado:



Tramo AC

$$15 \cdot 2,5 + 2,5 \cdot 6 = 5 R_B \rightarrow R_B = 52,5/5 = 10,5 \text{ Tn.}$$

$$15 \cdot 2,5 - 2,5 \cdot 1 = 5 R_A \rightarrow R_A = 35/5 = 7 \text{ Tn.}$$

Ley de M_f .

a) $0 \leq x \leq 5$

$$M_f = 7x - \frac{3}{2} x^2$$

$$M_f = 0 = 7 - \frac{3}{2} x \rightarrow x = \frac{14}{3} = 4,66 \text{ ms}$$

$$x = 0 ; M_f = 0$$

$$x = \frac{7}{3} ; M_f = \frac{49}{3} - \frac{49}{6} = \frac{49}{6} \text{ (máximo)}$$

$$x = 5 ; M_f = - 2,5.$$

b) $5 \leq x \leq 6$

$$M_f = - 2,5 (6-x) = 2,5x - 15.$$

$$x = 5 ; M_f = - 2,5.$$

$$x = 6 ; M_f = 0$$

Ley de cortantes:

a) $0 \leq x \leq 5.$

$$Q = - 7 + 3x$$

$$x = 0 ; Q = - 7$$

$$x = \frac{7}{3} ; Q = 0$$

$$x = 5 ; Q = 8$$

b) $5 \leq x \leq 6.$

$$Q = - 2,5.$$

Tramo CD

Ley de M_f .

a) $M_f = 2,5x ; 0 \leq x \leq 1,5$

$$x = 0 ; M_f = 0$$

$$x = 1,5 ; M_f = 3,75$$

b)

$$M_f = 2,5 (3-x)$$

$$x = 3$$

$$x = 1,5$$

$$1,5 \leq x \leq 3$$

$$M_f = 0$$

$$M_f = 3,75$$

Ley de cortantes:

a) $0 \leq x \leq 1,5$

$$Q = -2,5$$

b) $1,5 \leq x \leq 3$

$$Q = +2,5$$

Tramo DF

Reacciones:

$$-2,5 \cdot 1 = +R_F \cdot 5 ;$$

$$R_F = -0,5 \text{ Tn.}$$

$$2,5 \cdot 6 = R_E \cdot 5 ;$$

$$R_E = 3 \text{ Tn.}$$

Ley de M_f .

a) $0 \leq x \leq 1$

$$M_f = -2,5x$$

$$x = 0 ; M_f = 0$$

$$x = 1 ; M_f = -2,5$$

b) $1 \leq x \leq 6$

$$M_f = -0,5(6-x) = 0,5x - 3$$

$$x = 1 ; M_f = -2,5$$

$$x = 6 ; M_f = 0$$

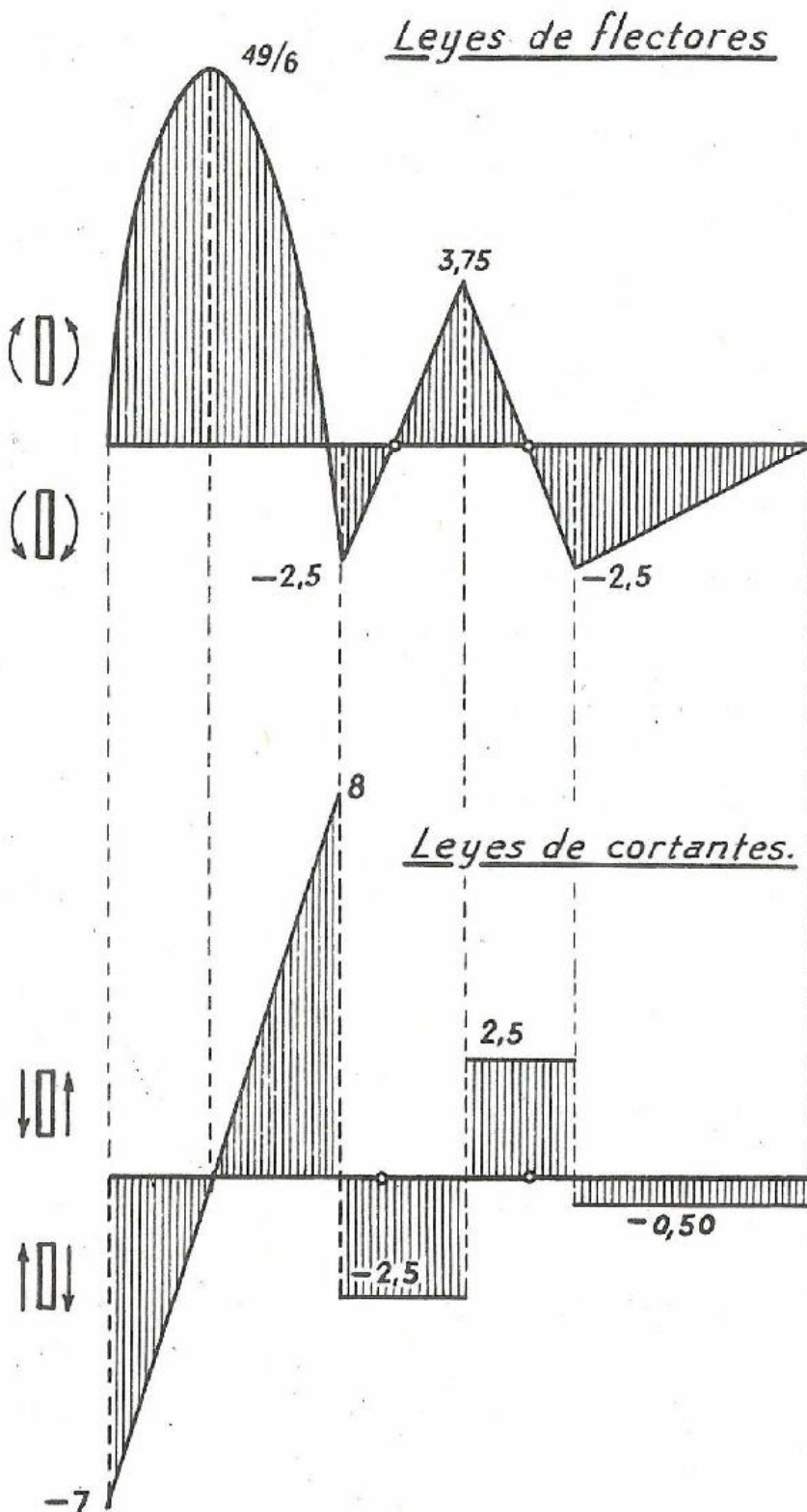
Ley de cortantes:

a) $0 \leq x \leq 1$

$$Q = 2,5$$

b) $1 \leq x \leq 6.$

$$Q = -0,5$$



4-1. - DEFORMACIONES. - 4-2. - TEOREMAS DE MOHR. .
4-3. - ECUACIONES DE LA ELASTICA. - 4-4. - TEOREMAS DE
CASTIGLIANO

-o-

4-1. - DETERMINACION DE DEFORMACIONES EN PIEZAS REC-
TAS ISOSTATICAS. - La determinación de las deforma-
ciones que se producen en una pieza puede abordarse mediante
dos métodos diferentes:

A) Estudiando las deformaciones elementales de una rebanada y
su efecto sobre el resto de la pieza.

B) Basándose en consideraciones energéticas.

A) Deformaciones elementales producidas en una rebana-
da y su efecto sobre el resto de la pieza.

La actuación de un esfuerzo axial N , produce una deformación
longitudinal.

$$\Delta(ds) = N \frac{ds}{E\Omega} = N d\epsilon.$$

siendo $d\epsilon = \frac{ds}{E\Omega}$ la elongabilidad elemental.

- La actuación de un momento flector M_f produce un giro rela-
tivo de las caras de la rebanada.

$$d\vartheta = M_f \cdot \frac{ds}{EI} = -M_f \cdot d\varphi.$$

siendo $d\varphi = \frac{ds}{EI}$ la flexibilidad elemental.

- La actuación de un esfuerzo cortante Q , produce una defor-
mación despreciable con respecto a las anteriores en el cálcu-
lo de las deformaciones de la pieza, razón por la que no suele
considerarse.

- La actuación de un incremento uniforme de temperatura (Δt)
en toda la sección, produce una deformación longitudinal.

$$\Delta(ds) = k \cdot \Delta t \cdot ds$$

-La actuación de una distribución lineal de temperaturas a lo largo del canto, produce dos efectos:

1. Un giro relativo de las caras de la rebanada.

$$d\theta = \frac{k(t_s - t_i)}{c} ds.$$

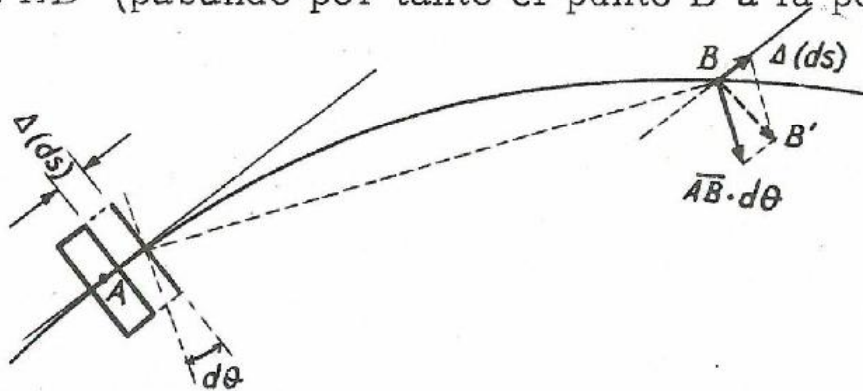
siendo $\frac{t_s - t_i}{c}$ el gradiente de temperaturas.

2. Una deformación longitudinal de toda la sección, medida según la directriz, de valor:

$$\Delta(ds) = k \Delta t_G \cdot ds$$

siendo Δt_G el incremento de temperatura que experimenta el centro de gravedad de la sección.

La deformación de una rebanada A produce en una sección normal a la directriz en un punto B un movimiento compuesto de: un giro relativo de las secciones normales en A y B, de valor $d\theta$, y dos traslaciones: una de módulo $\Delta(ds)$ según la dirección de la tangente a la directriz en A y otra de módulo $\overline{AB} \cdot d\theta$, perpendicular a \overline{AB} (pasando por tanto el punto B a la posición B').



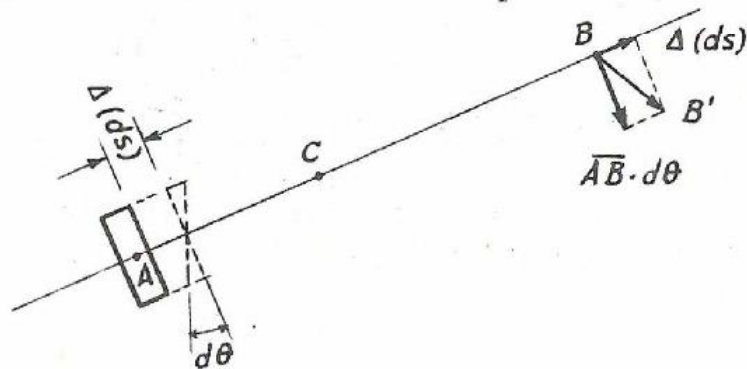
4-2. - Aplicación a piezas de directriz recta e inercia constante. -

- El giro relativo entre dos secciones es la integral de las deformaciones angulares elementales producidas en todas las rebanadas intermedias. Si las deformaciones angulares elementales son producidas por la acción exclusiva de un momento flector tenemos el primer teorema de Mohr.

$$\theta_A^B = \int_A^B d\theta = \int_A^B M_f \cdot \frac{ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int_A^B M_f \cdot ds$$

1º ["El giro relativo entre dos secciones es $\frac{1}{EI}$ del área del momento flector, comprendida entre las dos secciones".

- Al ser la directriz recta la traslación $\overline{AB} d\theta$, es perpendicular a la tangente a la directriz en el punto A.



- La traslación relativa según la directriz, entre dos secciones A y B es:

$$\Delta_H = \int_A^B \Delta(ds)$$

- La distancia de un punto a la tangente a la directriz en otro es:

$$\Delta_v = \int_A^B CB \cdot d\theta$$

siendo CB la distancia al punto B de la rebanada que origina el giro elemental $d\theta$.

Si las deformaciones angulares elementales son producidas por la acción exclusiva de un momento flector, tenemos el segundo teorema de Mohr.

$$\Delta_v = \int_A^B \overline{CB} \cdot d\theta = \int_A^B \overline{CB} \cdot \frac{M_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_A^B M_f \cdot \overline{CB} \cdot ds$$

2º ["La distancia de un punto B a la tangente a la directriz en otro A, es $\frac{1}{EI}$ del momento del área de momentos flectores comprendida entre las dos secciones, respecto al punto B.

4-3. - La deformada de una viga por la acción exclusiva de la flexión se denomina elástica; cuando esta flexión es producida por un momento flector, sabemos que:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_f}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

siendo ρ el radio de curvatura = $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$

Como $y' \approx 0$; $1 + y'^2 \approx 1$. Tenemos entonces: $y'' = \frac{M_f}{EI}$.

Integrando con las condiciones de contorno correspondientes, tenemos la ecuación de la elástica; la y representa la flecha y la y' el giro de una sección con respecto a su posición inicial.

Si adoptamos como momentos flectores positivos (\downarrow) tomaremos el eje y positivo hacia abajo \downarrow ; si los momentos flectores positivos son (\uparrow) tomaremos y positivo hacia arriba \uparrow .

B. Mediante consideraciones energéticas.

Entendemos por energía elástica, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores durante el proceso de deformación elástica de la estructura:

En el caso en que durante el proceso de deformación de la estructura las fuerzas exteriores estén en equilibrio con las interiores y las deformaciones sean proporcionales a las fuerzas, la energía elástica puede calcularse por la expresión:

$$\xi = \Sigma \frac{1}{2} \int_{ed}^{ef} N^2 d\epsilon + \Sigma \frac{1}{2} \int_{ed}^{ef} M_f^2 d\varphi = \Sigma \frac{1}{2} \bar{F}_i d\bar{r}_i + \Sigma \frac{1}{2} M_i \theta_i$$

4-4. Teorema de Castigliano. -

Expresa que la derivada de la Energía Elástica respecto al influjo, es igual al movimiento eficaz del influjo. (Véanse ejercicios).

Forma práctica de aplicar este teorema: Se escribe:

$$m_j = \int M_f^I M_f^{II} d\varphi + \int N^I N^{II} d\epsilon + J \left[\int (M_f^{II})^2 d\varphi + \int (N^{II})^2 d\epsilon \right].$$

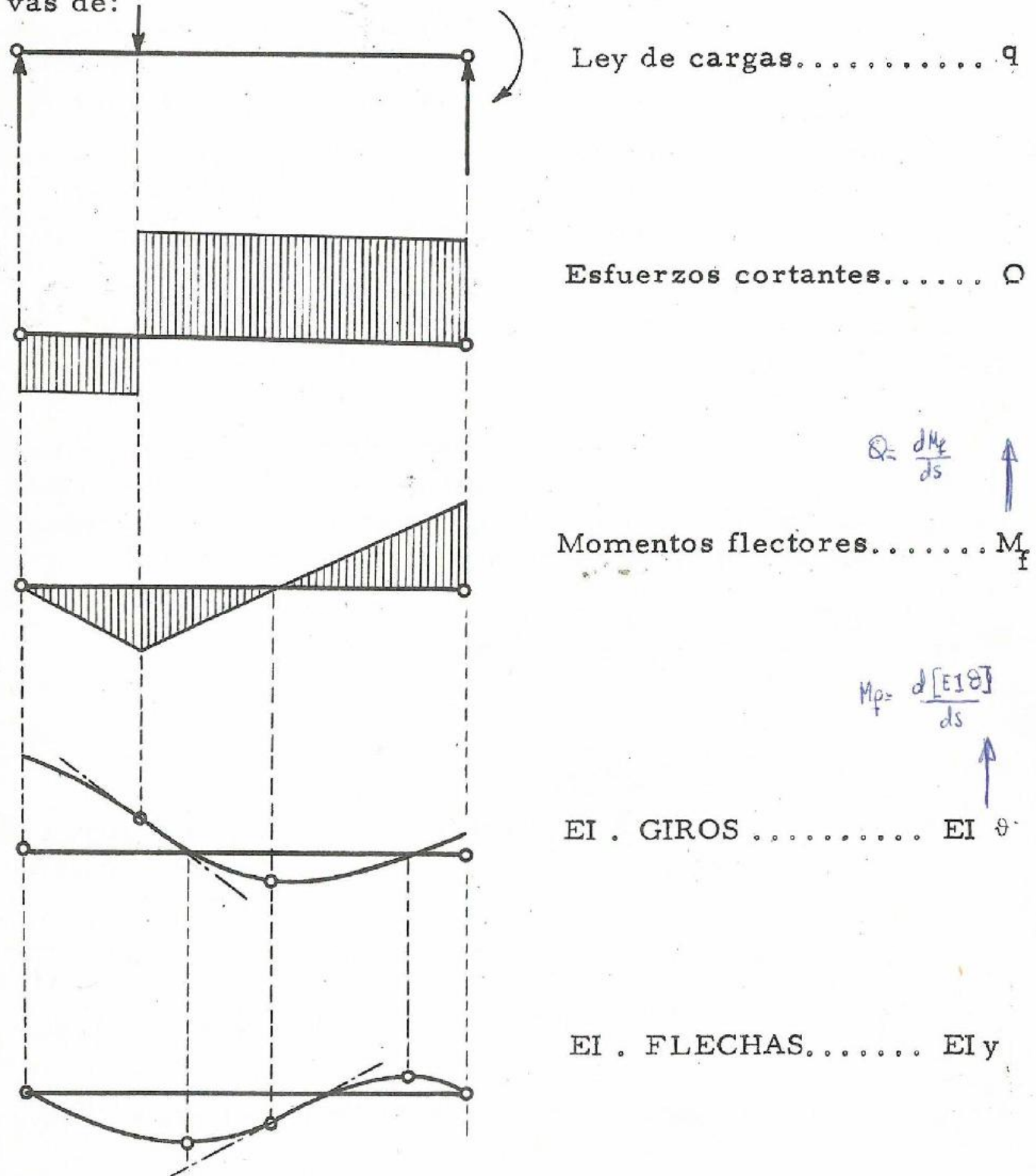
siendo M_f^I y N^I los esfuerzos en la rebanada sin actuar el in -

flujo.

M_f^{II} y N^{II} los esfuerzos en las rebanadas por la actuación de influjo unidad.

J valor del influjo (que puede ser nulo). Véanse ejercicios.

Si en una pieza recta consideramos las curvas representativas de:



Cada una de las curvas es integral de la que tiene encima y derivada de la que tiene debajo. Por tanto:

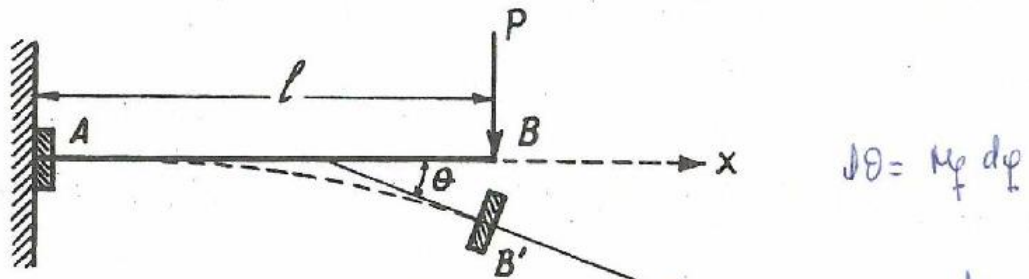
LOS PUNTOS DE:

SON PUNTOS DE:

carga $q = 0$	tangente horizontal de Q - Inflexión M_f
cortante $Q = 0$	tangente horizontal de M_f - Inflexión de ϑ
Flector $M_f = 0$	tangente horizontal de ϑ - Inflexión de y
Giro $\vartheta = 0$	tangente horizontal de y

- o -

- Determinar el giro relativo de las secciones A y B de una ménsula, sometida a una carga P vertical en el extremo,



Según el primer teorema de Mohr:

$$\vartheta = \int M_f dq \quad dq = \frac{ds}{EI}$$

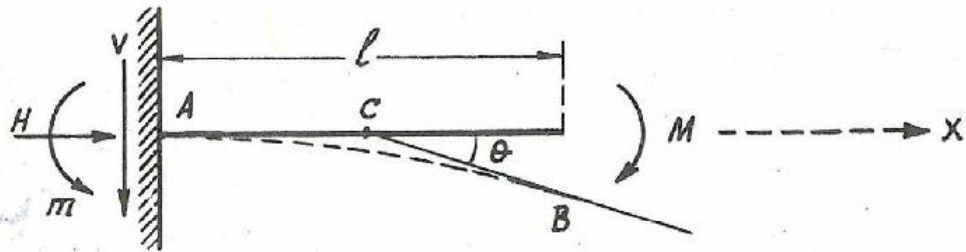
$$\vartheta_A^B = \int_A^B \frac{1}{EI} M_f ds.$$

La ley de Momentos flectores debidos a una carga P es:

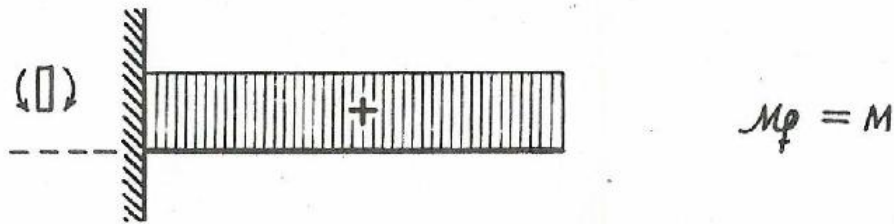
$$M_{f_x} = P(l-x); \quad \text{por tanto,}$$

$$\vartheta_A^B = \frac{1}{EI} \int_A^B M_f \cdot dx = \frac{1}{EI} \int_0^l P(l-x) dx = \frac{Pl^2}{2EI}$$

- Determinar el giro del extremo de la ménsula indicada en la figura, sabiendo que la sección de la viga desde $x = 0$, hasta $x = l/2$, tiene un momento de inercia doble que el resto de la viga.



Tenemos una ley de Momentos flectores.



Habíamos obtenido que el giro elemental producido en una rebanada por la actuación de un M_f era.

$$d\theta = \frac{M_f}{EI} ds$$

Por tanto, el giro θ del extremo, que coincide con el giro relativo entre A y B, será:

$$\theta = \int_A^B \frac{M_f}{EI} ds.$$

Como I, no es constante no podemos sacarle fuera de la integral; por lo que deberíamos recurrir a realizar tantas integra- ciones como leyes de variación de I, tengamos:

Para evitar esto existe el siguiente procedimiento: Tomemos un momento de inercia cualquiera de la viga como referencia - I_0 , cualquier otro I de una sección de la viga, será tal que:

$$\frac{I}{I_0} = k ; \quad I = I_0 k.$$

en donde k en el caso general será función de x.

Sustituyendo en la expresión del giro, tenemos:

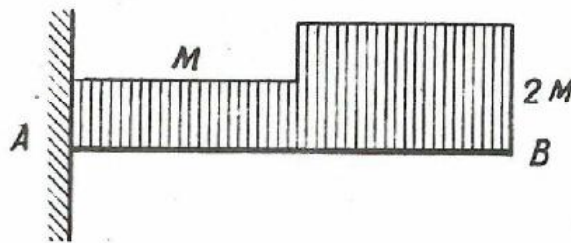
$$\theta = \int_A^B \frac{M_f}{EkI_0} ds = \frac{1}{EI_0} \int_A^B \frac{M_f}{k} ds = \frac{1}{EI_0} \int_A^B M_{f_0} ds.$$

Si consideramos la viga sometida a una ley de momentos flectores $M_{f_0} = M_f/k$, podemos resolver el problema por aplicación directa del teorema de Mohr (se demuestra análogamente para el 2º teorema).

En nuestro caso, tomemos como I_0 el momento de inercia en el empotramiento. Tendremos entonces:

- Desde $x = 0$, hasta $x = \frac{l}{2}$; $I = I_0$; $k = 1$; $M_{f_0} = M_f$
- Desde $x = \frac{l}{2}$ hasta $x = l$; $I = \frac{1}{2} I_0$; $k = \frac{1}{2}$; $M_{f_0} = 2 M_f$

Tendremos entonces la siguiente ley ficticia de momentos flectores:



Por tanto,

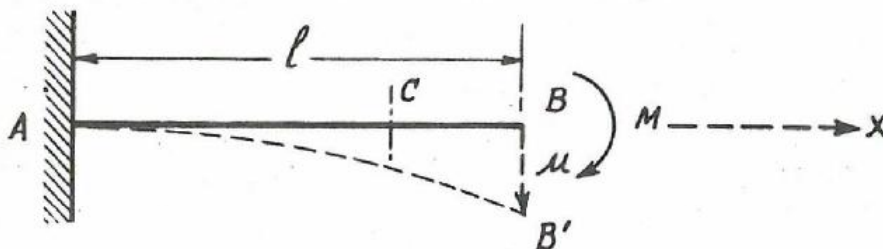
$$\int_A^B M_{f_0} ds = \frac{Ml}{2} + \frac{2Ml}{2} = \frac{3Ml}{2} \text{ (Area de momentos).}$$

Por tanto,

$$\vartheta = \frac{3 M l}{2 E I_0}$$

- o -

3. Determinar la flecha en el extremo de una ménsula, sometida a un momento en dicho extremo.



El 2º teorema de Mohr nos da la distancia de un punto de la deformada a la tangente a la directriz en otro.

Apliquemos este teorema entre A y B. La distancia del punto B a la tangente a la directriz en A, coincide con la flecha

del punto B, ya que la tangente a la directriz deformada en A, coincide con el eje x por efecto del empotramiento que impide el giro en A.

$$u = \int_A^B M_f (l-x) \frac{dx}{EI}$$

La ley de momentos flectores es $M_f = M$, por tanto

$$u = \int_0^l M (l-x) \frac{dx}{EI} = \frac{M}{EI} \int_0^l (l-x) dx = \frac{Ml^2}{2EI}$$

Si quisiéramos calcular la flecha en un punto cualquiera c, tendríamos:

$$u_c = \int_0^{x_c} M(x_c-x) \frac{dx}{EI} = \frac{M}{EI} \int_0^{x_c} (x_c-x) dx = \frac{Mx_c^2}{2EI}$$

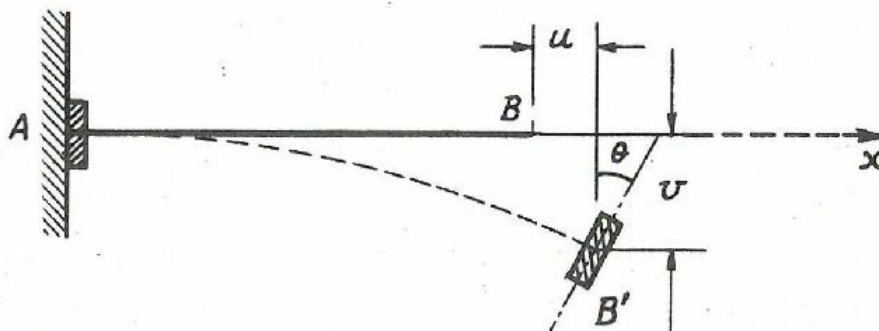
que nos representa al considerar variable el punto c, la elástica de la pieza,

$$u = \frac{Mx^2}{2EI}$$

- Es conveniente fijarse que el 2º teorema de Mohr, no da directamente las flechas a no ser en determinados casos como éste de las ménsulas.

-o-

4. Una ménsula de longitud l , se encuentra sometida a una temperatura uniforme t_1 ; por la acción del sol la temperatura en la cara superior aumenta hasta un valor t_2 , permaneciendo la cara inferior a temperatura t_1 . Determinar las deformaciones que se producen en el extremo de la ménsula. Coeficiente de dilatación lineal = k . Se considerará que el c. de g. de la sección está en el punto medio del canto.



Por la acción de la temperatura el extremo B pasa a la posición B' mediante una deformación horizontal u , una deformación vertical v y un giro que de la sección ϑ .

Recordemos que la deformación de una rebanada c por un gradiente lineal de temperaturas produce en una rebanada B, los siguientes efectos:

- Alargamiento horizontal:

$$du = k \Delta t_m ds, \text{ siendo } \Delta t_m = \frac{t_2+t_1}{2} - t_1 = \frac{t_2-t_1}{2}$$

- Giro elemental:

$$d\vartheta = \frac{k(t_2-t_1)}{c} ds.$$

Desplazamiento perpendicular a la tangente a la directriz:

$$dv = (l-x) d\vartheta$$

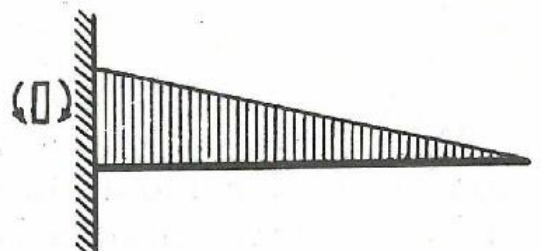
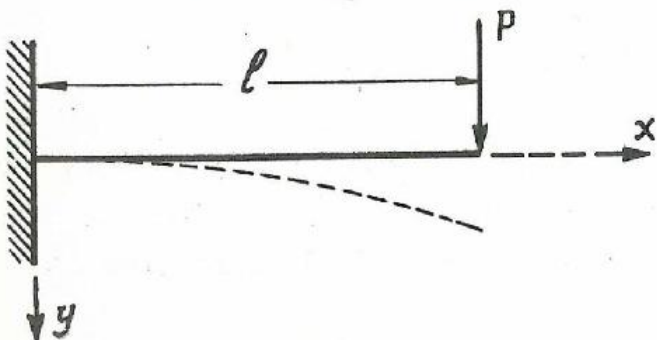
Considerando la acción de todas las rebanadas intermedias, tendremos entonces:

$$u = \int_0^l k \Delta t_m ds = \frac{t_2-t_1}{2} k \int_0^l dx = \frac{k l (t_2-t_1)}{2}$$

$$\vartheta = \int_0^l \frac{k(t_2-t_1)}{c} ds = \frac{k(t_2-t_1)}{c} \int_0^l dx = \frac{k \cdot l (t_2-t_1)}{c}$$

$$v = \int_0^l (l-x) \frac{k(t_2-t_1)}{c} ds = \frac{k(t_2-t_1)}{c} \int_0^l (l-x) ds = \frac{k(t_2-t_1)l^2}{2c}$$

5. Determinar la ecuación de la elástica de una ménsula sometida a una carga P en su extremo:



Habíamos obtenido la ecuación diferencial de la elástica.

$$y'' = \frac{M_f}{EI}$$

En este caso tenemos una ley de momentos flectores $M_f = P(l-x)$

$$y'' = \frac{P(l-x)}{EI} = \frac{dy'}{dx}$$

$$y' = \int y'' dx = -\frac{P}{EI} \frac{(l-x)^2}{2} + c_1$$

$$y = \int y' dx = \frac{P}{EI} \frac{(l-x)^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Las constantes de integración las determinamos a partir de las ecuaciones de contorno:

$$\text{Para } x = 0 \quad ; \quad y = 0 \quad y' = 0$$

Nótese que al calcular la ecuación de la elástica, realizamos una primera integral que nos da y' , es decir, calculamos la tan gente a la elástica en cada punto.

Particularizando para las condiciones de contorno, tenemos :

$$c_1 = \frac{Pl^2}{2EI} \quad , \quad c_2 = -\frac{Pl^3}{6EI}$$

con lo que obtenemos:

- Ecuación de la elástica.

$$y = \frac{P(l-x)^3}{6EI} + \frac{Pl^2 x}{2EI} - \frac{Pl^3}{6EI} = \frac{Px^2(3l-x)}{6EI}$$

- Ecuación de la tangente a la elástica.

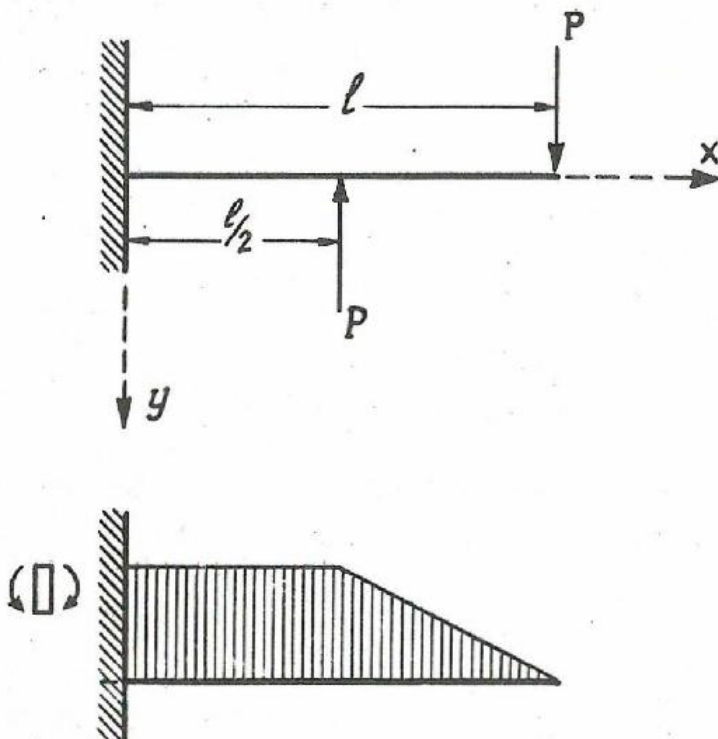
$$y' = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{P(l-x)^2}{2EI} = \frac{x[2l-x]}{2EI}$$

Mediante la ecuación de la elástica determinaremos la flecha en cualquier punto de la directriz, mediante la ecuación de la tangente determinaremos el giro relativo entre la sección con-

siderada y la sección de empotramiento, ya que en este caso coincide este giro relativo, con el ángulo que forma la tangente con el eje horizontal.

-o-

6. Determinar la ecuación de la elástica de una ménsula sometida a las solicitaciones indicadas en la figura.



Determinar en primer lugar, la ley de momentos flectores

$$M_f \Big|_{l/2}^l = P(l-x)$$

$$M_f \Big|_0^{l/2} = P \frac{l}{2}$$

Como tenemos dos leyes de variación de los momentos flectores tendremos dos ecuaciones para la elástica, válida cada una para el intervalo que corresponde a la ley de M_f a partir de la cual se ha deducido.

Entre $\frac{l}{2}$ y l .

$$y'' = \frac{M_f}{EI} = \frac{P(l-x)}{EI}$$

$$y' = -\frac{P}{EI} \frac{(l-x)^2}{2} + c_1$$

$$y = \frac{P}{EI} \frac{(l-x)^3}{6} + c_1 x + c_2$$

entre 0 y $\frac{l}{2}$

$$y'' = \frac{M_f}{EI} = \frac{Pl}{2EI}$$

$$y' = \frac{Plx}{2EI} + c_3$$

$$y = \frac{P l x^2}{4 EI} + c_3 x + c_4$$

Determinar las constantes con las siguientes condiciones:

$$\text{Para } x = 0 ; \quad y = 0 ; \quad y' = 0$$

Para $x = \frac{l}{2}$, deben ser iguales los valores de la flecha y del giro calculadas por las dos ecuaciones de la elástica, ya que la estructura no presenta después de deformada ninguna discontinuidad.

De la primera, obtenemos: $c_3 = 0 ; \quad c_4 = 0$

De la segunda, tenemos:

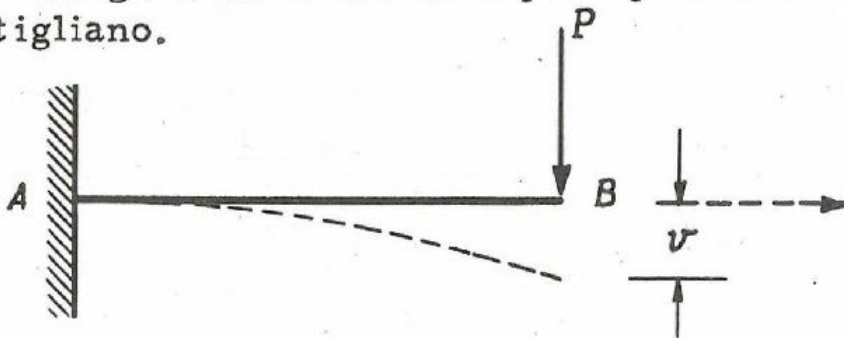
$$c_1 = \frac{P}{EI} \frac{l^2}{8} = \frac{P l^2}{4 EI} ; \quad c_1 = \frac{P l^2}{8 EI}$$

$$\frac{P l^3}{48 EI} + \frac{P l^3}{16 EI} + c_2 = \frac{P l^3}{16 EI} ; \quad c_2 = \frac{P l^3}{48 EI}$$

Determinadas las constantes obtenemos la ecuación de cada tramo de elástica, sin más que sustituir.

-o-

7. Determinar la flecha que se produce en una ménsula sometida a una carga P en el extremo por aplicación del teorema de Castigliano.



Si consideramos la carga P como influjo, su corrimiento eficaz en el proceso de deformación de la estructura, coincide con la flecha del punto B; por tanto, la aplicación del teorema de Castigliano nos da:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial P}$$

Como

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{ed}^{ef} M_f^2 d\varphi + \frac{1}{2} \int_{ed}^{ef} N^2 d\varepsilon$$

tenemos:

$$v = \frac{1}{2} \int_{ef}^{ed} 2 M_f \frac{\partial M_f}{\partial P} d\varphi + \frac{1}{2} \int_{ef}^{ed} 2N \frac{\partial N}{\partial P} d\varepsilon = \int_{ef}^{ed} M_f \frac{\partial M_f}{\partial P} d\varphi + \int_{ef}^{ed} N \frac{\partial N}{\partial P} d\varepsilon$$

En nuestro caso: $N = 0$; $M_f = P(l-x)$

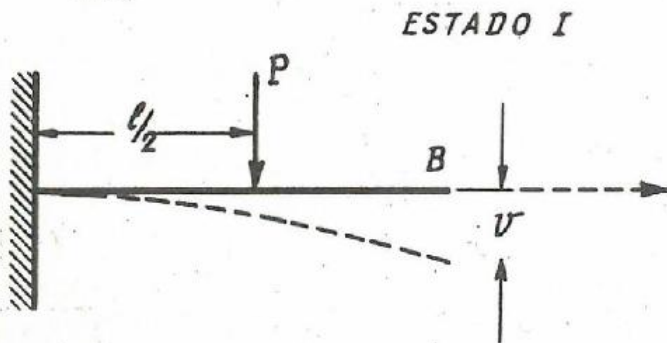
por tanto,

$$v = \int_0^l P(l-x) \cdot (l-x) \cdot \frac{dx}{EI} = \int_0^l P \frac{(l-x)^2}{EI} dx = \frac{Pl^3}{3EI}$$

El signo positivo de v indica que coincide con la dirección - que hemos tomado para el influjo.

-o-

8. Determinar la flecha en el extremo de la ménsula indicada en la figura mediante la aplicación del teorema de Castiglino.

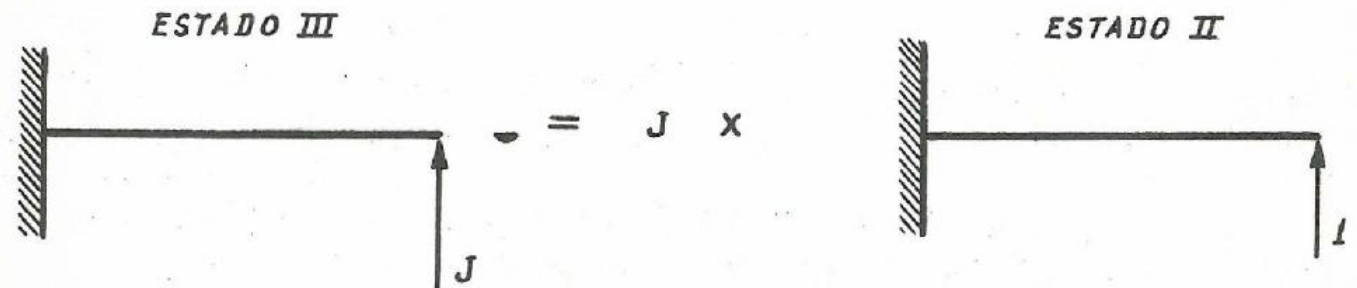


El teorema de Castiglino permite determinar la deformación de un punto de la estructura aunque en él no esté aplicada ninguna fuerza.

Fijémonos en primer lugar cuál es el influjo -o influjos-

cuyo corrimiento eficaz es el movimiento que deseamos calcular. En este caso, el influjo correspondiente a una flecha en B, es una fuerza ^{virtual} aplicada en B.

Consideremos como estado de carga III el producido por la sola actuación de este influjo.



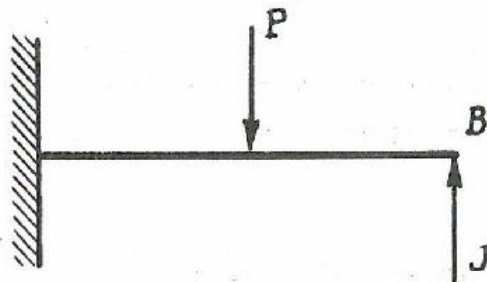
Los esfuerzos debidos a este estado de cargas podemos de-

terminarlos multiplicando por J los esfuerzos calculados con un influjo unidad.

$$M_{f_{III}} = J M_{f_{II}} ; N_{III} = J N_{II} ; Q_{III} = J Q_{II}$$

Consideremos como estado de carga I el estado inicial de la estructura.

El estado de cargas I + III = I + J.II, será por tanto:



En consecuencia, por el principio de superposición de efectos.

$$M_{f_{I+III}} = M_{f_I} + J M_{f_{II}} ; N_{I+III} = N_I + J N_{II} ; Q_{I+III} = Q_I + J Q_{II}$$

En este estado de cargas podemos calcular la flecha en B, sin más que derivar la energía elástica con respecto a J.

$$v_{I+III} = \frac{\partial \xi_{I+III}}{\partial J} = \int_{ed}^{ef} M_{f_{I+III}} \frac{\partial M_{f_{I+III}}}{\partial J} d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_{I+III} \frac{\partial N_{I+III}}{\partial J} d\varepsilon$$

Como

$$\frac{\partial M_{f_{I+III}}}{\partial J} = M_{f_{II}} , \quad \frac{\partial N_{I+III}}{\partial J} = N_{II}$$

sustituyendo, tenemos:

$$v_{I+III} = \int_{ed}^{ef} M_{f_I} M_{f_{II}} d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_I N_{II} d\varepsilon + J \left[\int_{ed}^{ef} M_{f_{II}}^2 d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_{II}^2 d\varepsilon \right]$$

Si ahora hacemos J = 0 el estado I + III será el estado I inicial de cargas y por tanto, la flecha será:

$$v_1 = \int_{ed}^{ef} M_{fI} M_{fII} d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_I N_{II} d\varepsilon$$

En nuestro caso tenemos:

ESTADO I

$$M_{f_0}^{\ell/2} = P \left(\frac{\ell}{2} - x \right); \quad M_{f_{\ell/2}}^{\ell} = 0; \quad N_0^{\ell} = 0$$

ESTADO II

$$M_{f_0} = -(\ell - x); \quad N_0^{\ell} = 0$$

El sentido positivo a adoptar para los esfuerzos es indiferente con tal de que se tome el mismo para los dos estados.

$$v_1 = \int_0^{\ell/2} -(\ell - x) P \frac{\ell - 2x}{2} \frac{dx}{EI} + \int_{\ell/2}^{\ell} -(\ell - x) \cdot 0 \cdot \frac{dx}{EI}$$

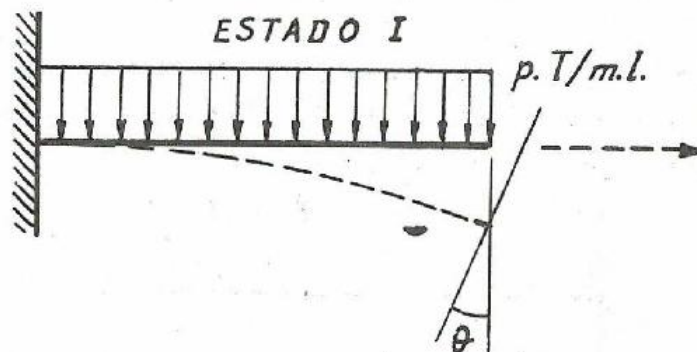
La integral desde el extremo dorsal al frontal, debe descomponerse en tantas integrales, como se necesiten para las discontinuidades de las leyes de esfuerzos.

$$v_1 = -\frac{P}{2EI} \int_0^{\ell/2} (\ell^2 + 2x^2 - 3\ell x) dx = -\frac{5Pl^2}{48EI}$$

El signo menos de la flecha indica que tiene la dirección contraria a la que hemos tomado para el influjo, es decir, como habíamos tomado el influjo hacia arriba la flecha será hacia abajo.

-o-

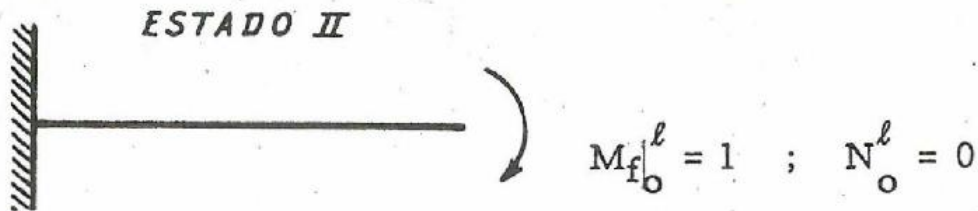
9. Determinar el giro en el extremo de una ménsula sometida a una sobrecarga uniforme P mediante el teorema de Castigliano.



En el estado de cargas I, tenemos:

$$M_f|_0^l = \frac{P(l-x)^2}{2} ; N_o^l = 0$$

El estado de cargas II será el correspondiente a la actuación de un influjo unidad, cuyo movimiento eficaz sea el giro que pretendemos calcular.

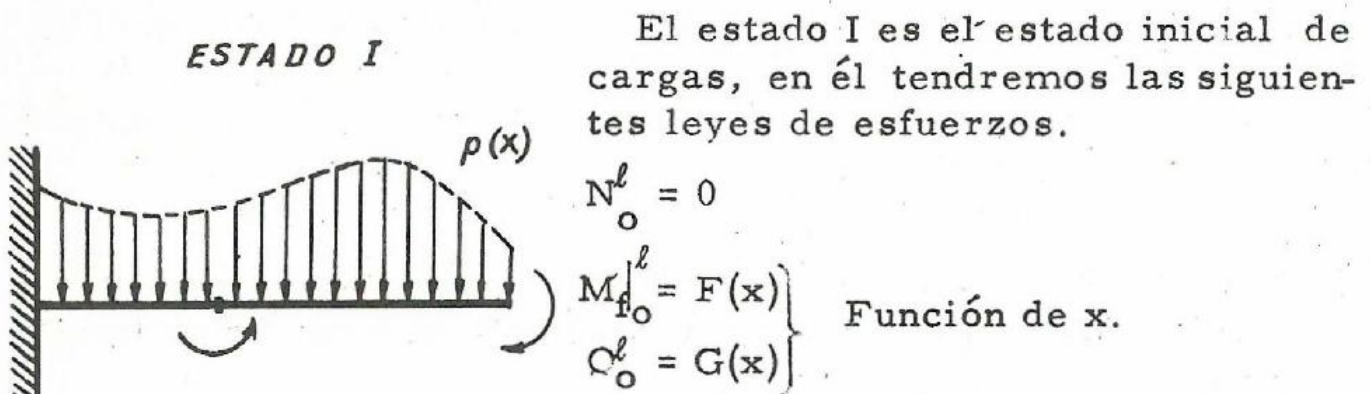


Aplicando el teorema de Castigliano, tenemos:

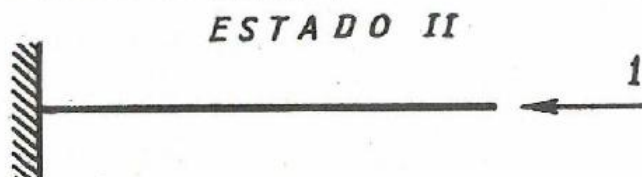
$$\vartheta = \int_{ed}^{ef} N_I N_{II} d\varepsilon + \int_{ed}^{ef} M_{fI} M_{FII} d\varphi$$

$$\vartheta = \int_0^l P \frac{(l-x)^2}{2} \frac{dx}{EI} = \frac{Pl^3}{6EI}$$


10. Determinar el corrimiento horizontal del extremo de una ménsula, sometida a la acción de unos momentos y unas fuerzas verticales cualesquiera.



El estado II será el correspondiente a la actuación de un influjo unidad, cuyo movimiento eficaz sea el corrimiento horizontal que pretendemos calcular.



En este estado tendremos las siguientes leyes de esfuerzos.

$$\begin{array}{l} N_o^l = 1 \\ Q_o^l = 0 \\ M_{f_o}^l = 0 \end{array}$$


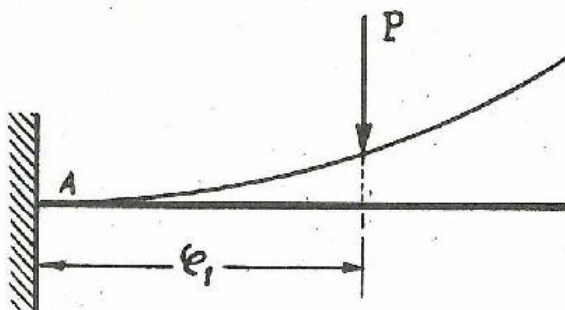
Aplicando el teorema de Castigliano, tenemos:

$$u = \int_{ed}^{ef} M_{f_I} M_{f_{II}} d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_I N_{II} d\varepsilon.$$

Como $M_{f_{II}}$ es cero y $N_I = 0$ las dos integrales son nulas y por tanto, también lo es el corrimiento horizontal.

-o-

11. ¿Cuál debe ser la ecuación del eje de la barra AB antes de flexarse, para que la carga P, cualquiera que sea el punto de la barra en que actúe, quede siempre, al deformarse la barra al nivel de A.



La ecuación ha de ser tal, que el punto de abscisa x , tomase un corrimiento igual al que tomaría, la misma viga en voladizo.

Vamos a determinar la flecha en un punto de abscisa x_1 .

Aplicando el 2º teorema de Mohr.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{EI} \int_0^{x_1} M_f(x_1 - x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{x_1} P(x_1 - x)^2 dx = \\ &= \frac{P}{EI} \frac{(x_1 - x)^3}{3} \Big|_0^{x_1} = -\frac{P x_1^3}{3 EI} \end{aligned}$$

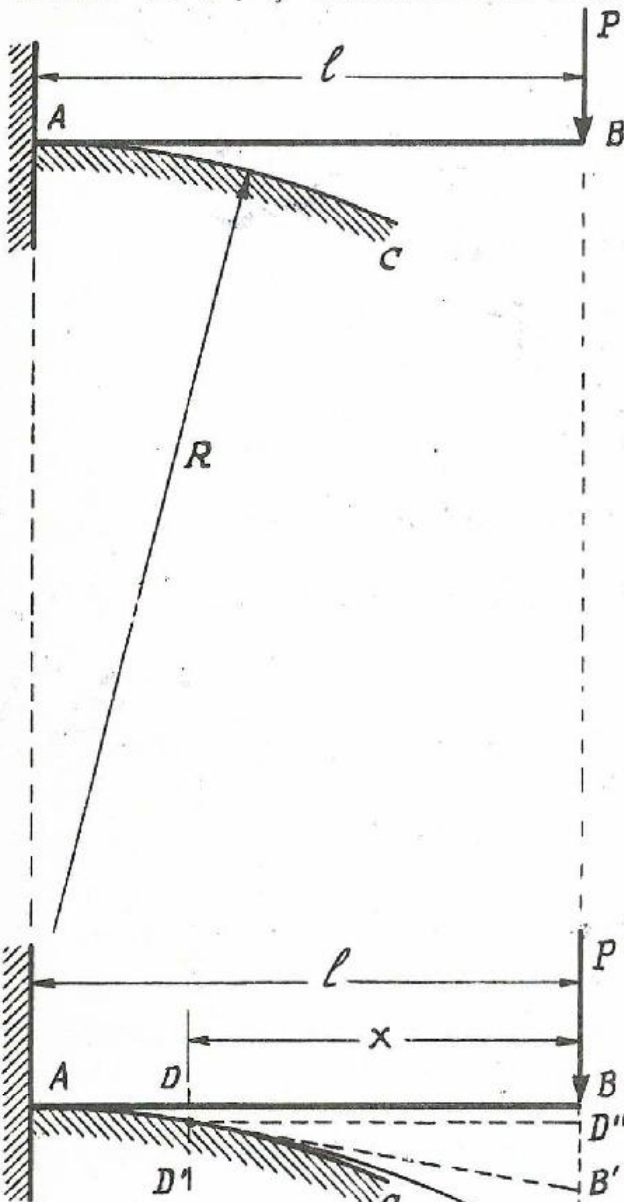
Ahora si x_1 es variable nos queda la ecuación pedida que será:

$$y = -\frac{P x^3}{3 EI}$$

-o-

12. Estudiar la deformación de la viga adjunta para distintos va-

lores de P, y calcular la flecha en el extremo libre.



Sabemos que el radio de curvatura en un punto es

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{Px}{EI} \quad "$$

Para que la viga se apoye será necesario que para $x = l$

$$\frac{1}{R} = \frac{P_1 l}{EI} \quad " \quad P_1 = \frac{EI}{Rl}$$

Si $P \leq P_1$ " la viga se comporta en voladizo, y la flecha en el extremo es

$$\delta = \frac{P l^3}{3EI} = \frac{EI}{Rl} \frac{l^3}{3EI} = \frac{l^2}{3R}$$

Si $P > P_1$ " la viga se irá apoyando, hasta que tome un radio de curvatura igual a R.

$$\frac{1}{r} = \frac{Px_1}{EI} \frac{1}{R} \rightarrow x_1 = \frac{EI}{PR}$$

Flecha:

Se compone de tres sumandos - (véase figura).

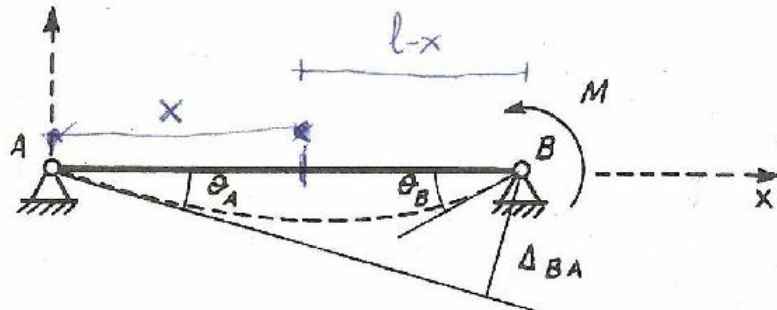
$$1^{\circ}) \quad DD' = \delta_1 = \frac{(l-x_1)^2}{2R} = \frac{1}{2R} \left(l - \frac{EI}{PR} \right)^2$$

$$2^{\circ}) \quad D''B' = \delta_2 = \frac{x_1(l-x_1)}{R} = \frac{1}{R} \frac{EI}{PR} \left(l - \frac{EI}{PR} \right)$$

$$3^{\circ}) \quad B'B'' = \delta_3 = \frac{Px_1^3}{3EI} = \frac{P}{3EI} \left(\frac{EI}{PR} \right)^3$$

$$\text{La flecha } f = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{l^2}{2R} - \frac{1}{6} \frac{(EI)^2}{P^2 R^3}$$

13. Determinar el giro que se produce en los apoyos de una viga biarticulada, sometida a la acción de un momento en uno de los apoyos.



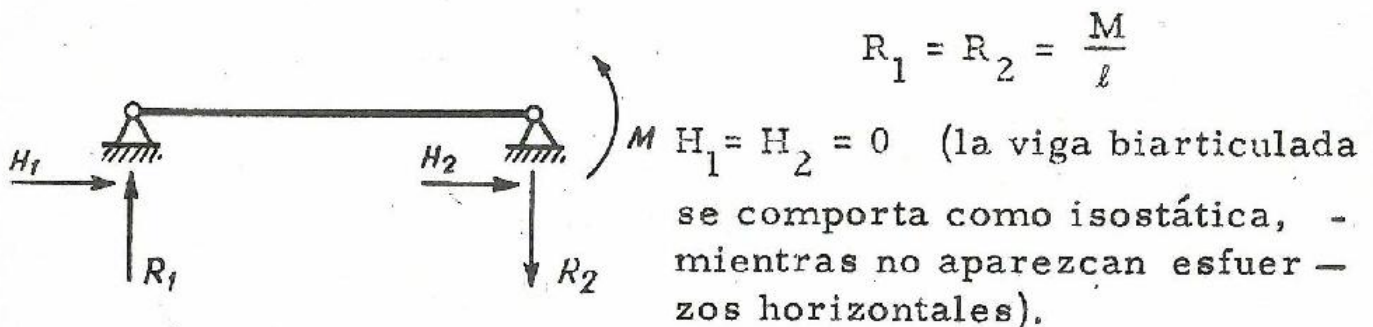
Si aplicamos el 2º teorema de Mohr, podemos calcular la distancia Δ_{BA} del punto B a la tangente a la directriz deformada en A.

$$\Delta_{BA} = \int_A^B M_f(l-x) \frac{dx}{EI}$$

Como las deformaciones son muy pequeñas $\vartheta_A = \text{sen } \vartheta_A$ y por tanto:

$$\vartheta_A = \frac{\Delta_{BA}}{l} = \frac{1}{EI l} \int_A^B M_f(l-x) dx$$

Determinamos la ley de momentos flectores.



$$M_{f_x} = M - R_2(l-x) = \frac{Mx}{l}$$

conocido M_{f_x} obtenemos ϑ_A sin más que calcular la integral.

$$\vartheta_A = \frac{1}{EI l} \int_0^l (l-x) dx = \frac{Ml}{6 EI}$$

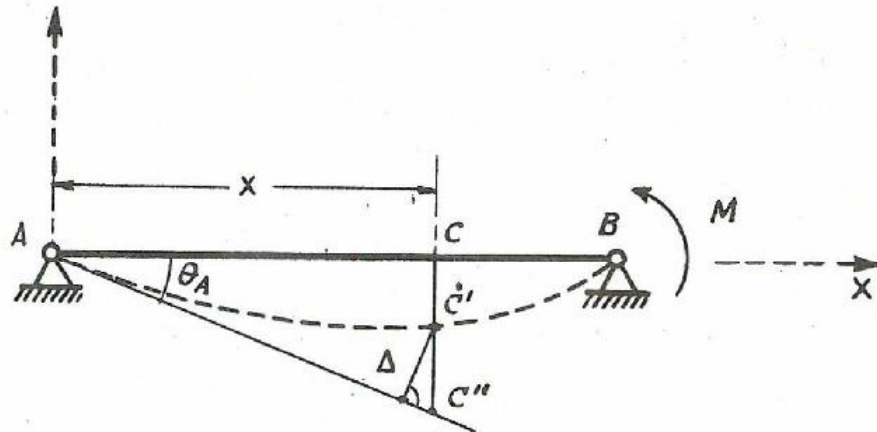
El giro en el apoyo B se calcula por igual método.

$$\Delta_{AB} = \int_A^B M_f \times \frac{dx}{EI}$$

$$\vartheta_B = \frac{\Delta_{AB}}{l} = \frac{1}{E.I.l.} \int_0^l \frac{Mx}{l} \times dx = \frac{Ml}{3 EI}$$

-o-

14. Determinar la flecha en el punto medio de una viga biarticulada sometida a un momento en uno de sus apoyos.



Aunque el 2º teorema de Mohr no dé directamente la flecha en una viga biarticulada, como sucede con la ménsula, sin embargo nos permite calcularla fácilmente. En la figura tenemos,

$$cc' + c'c'' = cc''$$

$$\left. \begin{aligned} cc'' &= x \vartheta_A \\ c'c'' &\approx \Delta \end{aligned} \right\}$$

ya que al ser las deformaciones muy pequeñas podemos hacer

$$\vartheta_A = \text{tg } \vartheta_A \text{ y } \cos \vartheta_A = 1$$

Por tanto,

$$cc' = f = x \vartheta_A - \Delta$$

ϑ_A está calculada en el problema anterior y vale: $\frac{Ml}{6 EI}$

Δ es la distancia de un punto a la tangente a la directriz en otro calculable mediante el 2º teorema de Mohr.

Si estamos calculando la flecha en el punto medio $x_c = \frac{l}{2}$.

$$\Delta = \int_0^{\ell/2} M_f \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \frac{dx}{EI} ,$$

Del caso anterior tenemos: $M_f = \frac{Mx}{\ell}$

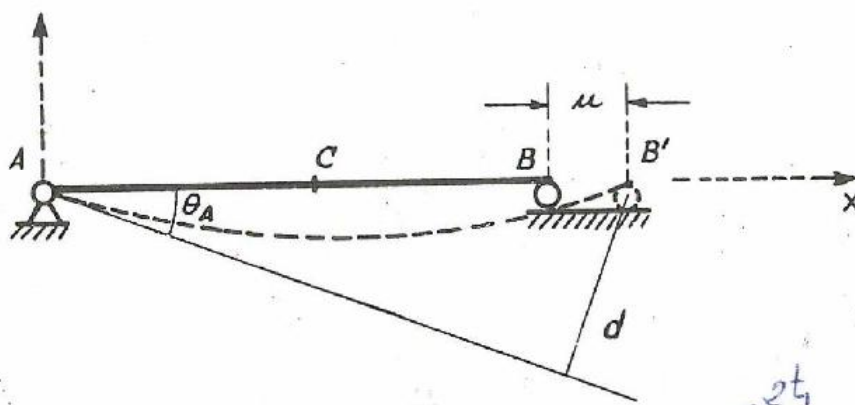
$$\Delta = \frac{M}{2 EI \ell} \int_0^{\ell/2} x (\ell - 2x) dx = \frac{M \ell^2}{48 EI}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$f = \frac{M \ell}{6 EI} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{M \ell^2}{48 EI} = \frac{M \ell^2}{16 EI}$$

-o-

15. Una viga articulada y apoyada, sometida a una temperatura t , experimenta un aumento de temperatura de su cara superior alcanzando un valor $t_2 = 2t$, mientras que la cara inferior permanece a temperatura t_1 . Determinar el corrimiento del apoyo deslizable y el giro del extremo opuesto, coeficiente de dilatación lineal = k . Se considerará que el c. d. g. de la sección está en el punto medio del canto.



La temperatura media experimenta un incremento.

$$\Delta t_m = \frac{t_2 + t_1}{2} - t_1 = \frac{2t + t_1 - 2t_1}{2} = \frac{t_1}{2}$$

La deformación de una rebanada c produce por tanto:

Un alargamiento.

$$\Delta(ds) = k \Delta t_m \cdot ds = \frac{kt_1}{2} ds.$$

Un giro elemental.

$$d\theta = \frac{k(t_2 - t_1)}{c} ds = \frac{k t_1}{2c} ds$$

Tendremos, por tanto,

$$u = \int_A^B \Delta(ds) = \int_0^l \frac{kt_1}{2} dx = \frac{kt_1 l}{2}$$

Mediante el 2º teorema de Mohr determinamos la distancia d desde el punto B' a la tangente a la directriz en A .

$$d = \int_0^l d\theta \cdot (l-x) = \int_0^l (l-x) \frac{kt_1}{2c} dx = \frac{kt_1 l^2}{4c}$$

Por tanto,

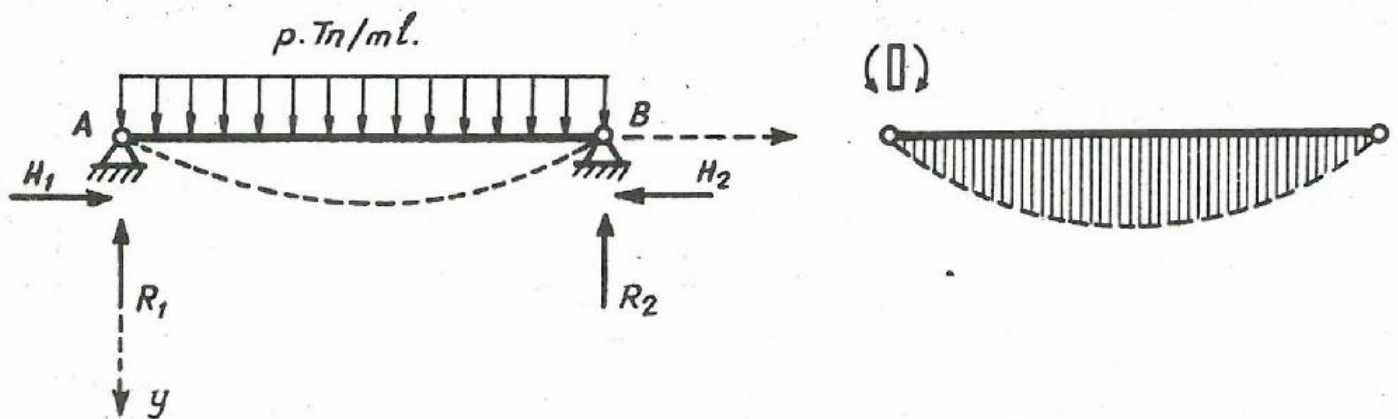
$$\theta_A = \text{sen } \theta_A = \frac{d}{l} = \frac{kt_1 l}{4c}$$

Nótese que hemos despreciado en este cálculo, los corrimientos u , frente a la longitud de la viga l .

Si la viga hubiera estado biarticulada la aparición de corrimientos horizontales daría lugar a reacciones horizontales ya que la viga sometida a este tipo de sollicitación es hiperestática.

-o-

16. Determinar la ecuación de la elástica de una viga biarticulada sometida a una carga uniforme de p . T/m.



Determinaríamos las reacciones:

$$R_1 = R_2 = \frac{Pl}{2}$$

$$H_1 = H_2 = 0$$

(se comporta como isostática al no haber so-

licitaciones horizontales).

La ley de momentos flectores es por tanto:

$$M_f = -R_2(l-x) + P \frac{(l-x)^2}{2} = \frac{P(x^2 - xl)}{2}$$

La ecuación diferencial de la elástica es:

$$y'' = \frac{M_f}{EI}$$

$$y'' = \frac{P}{2EI} (x^2 - xl)$$

Por tanto,

$$y' = \frac{P}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 l}{2} \right] + c_1$$

$$y = \frac{P}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3 l}{6} \right] + c_1 x + c_2$$

Obtenemos las constantes c_1 y c_2 mediante las condiciones de contorno.

$$\text{Para } x = 0 ; y = 0 ; \text{ Para } x = l ; y = 0$$

$$c_2 = 0 ; \frac{P}{2EI} \left(\frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{6} \right) + c_1 l = 0 ; c_1 = \frac{l^3}{12} \frac{P}{2EI}$$

Tenemos, por tanto:

- Ecuación de la elástica.

$$y = \frac{P}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3 l}{6} + \frac{l^3 x}{12} \right] = \frac{P}{24EI} (x^4 - 2x^3 l + l^3 x)$$

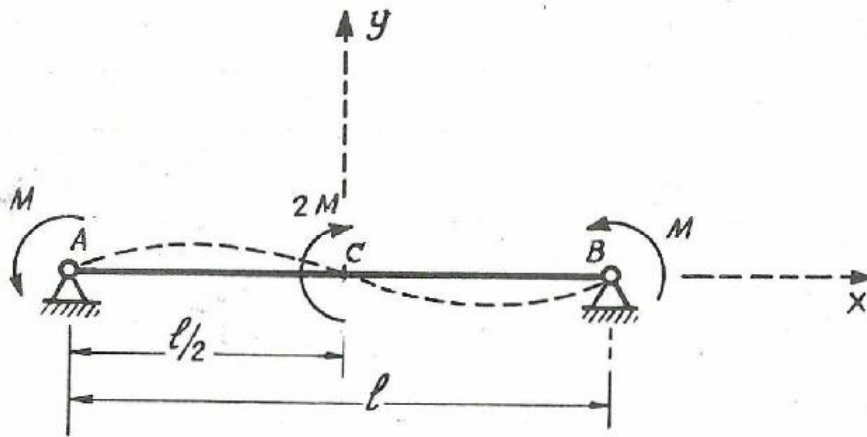
- Ecuación de la tangente a la elástica.

$$y' = \frac{P}{12EI} [2x^3 - 3x^2 l]$$

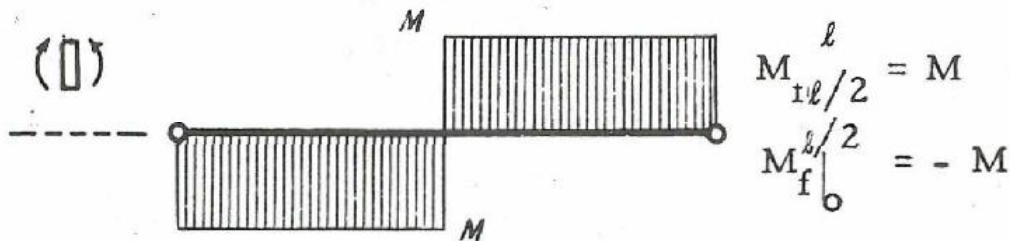
-o-

17. Determinar la ecuación de la elástica de una viga biarticulada sometida a la sollicitación indicada en la figura.

La sollicitación exterior está en equilibrio, por tanto no aparecen en los apoyos reacciones horizontales ni verticales.



La ley de M_f es:



La determinación de la ecuación de la elástica se facilita sensiblemente mediante una adecuada elección de los ejes. En el caso que nos ocupa debido a la simetría de cargas y de estructura podemos saber "a priori" que el punto c no va a tener ningún desplazamiento vertical, siendo la ecuación de la elástica a derecha e izquierda del punto c, simétrica con respecto a dicho punto.

Si consideramos entonces el punto c, como origen de coordenadas, simplificaremos sensiblemente la determinación de las constantes de integración, así como el propio problema de integración.

Tenemos entonces:

- Desde 0 hasta $l/2$.

$$y'' = \frac{M_f}{EI} = \frac{M}{EI}$$

$$y' = \frac{Mx}{EI} + c_1$$

$$y = \frac{Mx^2}{2EI} + c_1x + c_2$$

- Desde 0 hasta $-l/2$.

$$y'' = - \frac{M}{EI}$$

$$y' = - \frac{Mx}{EI} + c_3$$

$$y = - \frac{Mx^2}{2EI} + c_3x + c_4$$

Determinemos las constantes mediante las siguientes condiciones de contorno:

Para $x = 0$; $y = 0$; Para $x = \pm \frac{l}{2}$; $y = 0$

$$c_2 = 0 \quad , \quad c_4 = 0 ; \quad \frac{Ml^2}{8EI} + c_1 \frac{l}{2} = 0, \quad c_1 = - \frac{Ml}{4EI}$$

$$- \frac{Ml^2}{8EI} - c_3 \frac{l}{2} = 0; \quad c_3 = - \frac{Ml}{4EI}$$

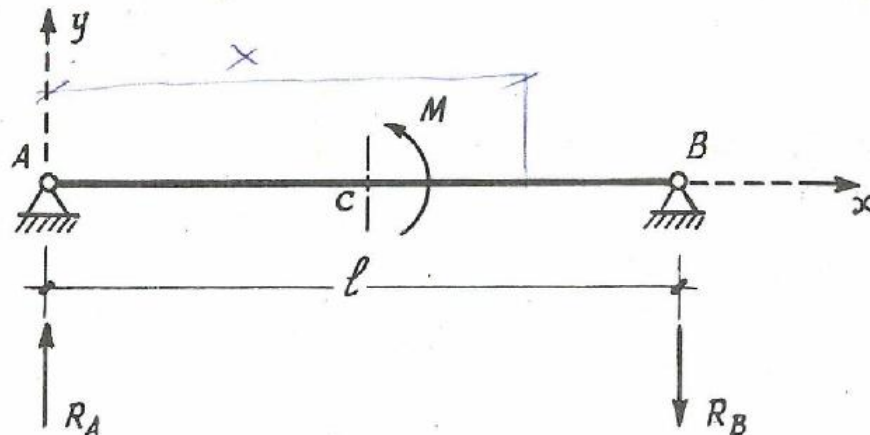
Sustituyendo las constantes, tenemos las siguientes ecuaciones para la elástica.

- Desde 0 hasta $l/2$ $y = \frac{Mx(2x-l)}{4EI}$

- Desde 0 hasta $-l/2$ $y = - \frac{Mx(2x+l)}{4EI}$

-o-

18. Determinar el giro que se produce en la sección central de la viga indicada en la figura, mediante la aplicación del teorema de Castigliano.



Como en este caso el influjo que produce el giro en la sección c de la ménsula, coincide con la sollicitación exterior, po-

demos resolver el problema sin necesidad de considerar los estados I y II de carga, sin más que expresar la energía elástica derivarla con respecto a M.


$$\xi = \frac{1}{2} \int_{ed}^{ef} M_f^2 d\varphi + \frac{1}{2} \int_{ed}^{ef} N^2 d\varepsilon$$

$$\vartheta_c = \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} d\varphi + \int_{ed}^{ef} N \frac{\partial N}{\partial M} d\varepsilon.$$

Calculamos por tanto las leyes de esfuerzos.

$$R_A = R_B = \frac{M}{l}$$

Tomaremos como esfuerzos positivos:



$$N_o^l = 0$$

$$M_{f_{l/2}}^l = R_B (l-x) = \frac{M}{l} (l-x) \quad ; \quad \frac{\partial M_f}{\partial M} = \frac{l-x}{l}$$

$$M_{f_o}^{l/2} = -R_A x = -\frac{M}{l} x \quad ; \quad \frac{\partial M_f}{\partial M} = -\frac{x}{l}$$

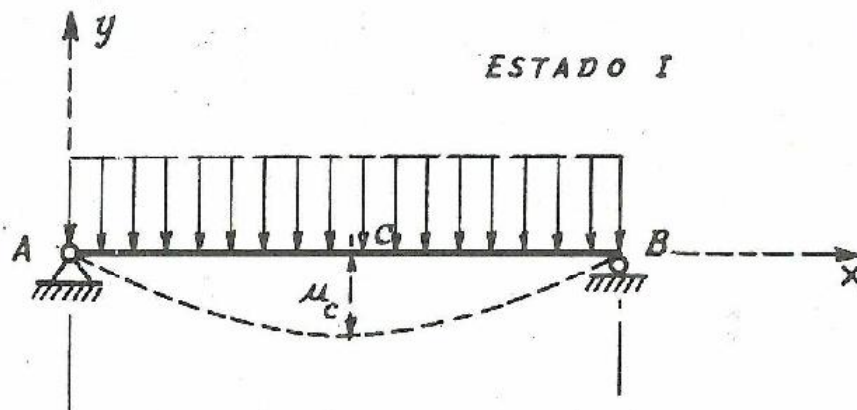
Por tanto, tendremos:

$$\vartheta_c = \int_0^{l/2} \frac{Mx}{l} \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{dx}{EI} + \int_{l/2}^l \frac{M}{l} (l-x) \frac{l-x}{l} \frac{dx}{EI} = \frac{Ml}{12 EI}$$

Como nos sale positivo, quiere decir que es en el mismo sentido que el momento.

-o-

19. Determinar la flecha que se produce en el punto medio de una viga simplemente apoyada, sometida a una sobrecarga uniforme de $P T/m.l$.



Consideremos como estado I, el estado inicial de cargas.

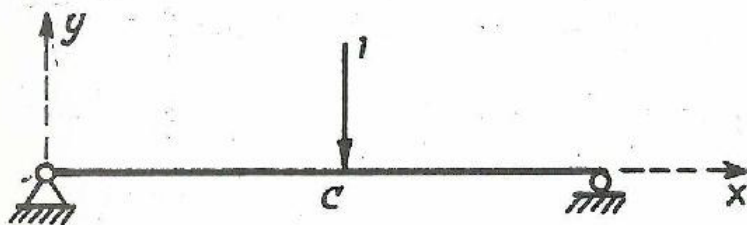
$$R_A = R_B = \frac{Pl}{2}$$

$$N_O^l = 0$$

$$M_{fO}^l = R_B \cdot (l-x) - P \frac{(l-x)^2}{2} = Px \frac{(l-x)}{2}$$



Consideremos como estado II el correspondiente a la actuación de un influjo unidad, cuyo movimiento eficaz sea la flecha que pretendemos calcular.



Tendremos:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}$$

$$N_O^l = 0$$

$$M_{fO}^{l/2} = \frac{x}{2}$$

$$M_{f_{l/2}}^l = \frac{l-x}{2}$$

Aplicando el teorema de Castigliano, tendremos:

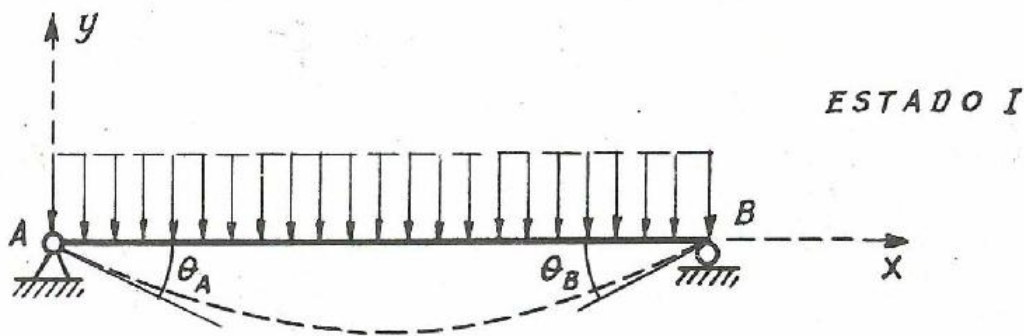
$$u_c = \int_{ed}^{ef} M_{fI} M_{fII} d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_I N_{II} ds$$

$$u_c = \int_0^{l/2} px \frac{l-x}{2} \cdot \frac{x}{2} \frac{dx}{EI} + \int_{l/2}^l px \frac{l-x}{2} \frac{l-x}{2} \frac{dx}{EI} = \frac{5pl^4}{384 EI}$$

Como nos sale positivo quiere decir que es en la misma dirección que hemos tomado para el influjo.

-0-

20. Determinar el giro que se produce en los apoyos de una viga simplemente apoyada sometida a una sobrecarga uniforme de $pT/m.l$.



Debido a la simetría existente, serán iguales los giros en ambos apoyos.

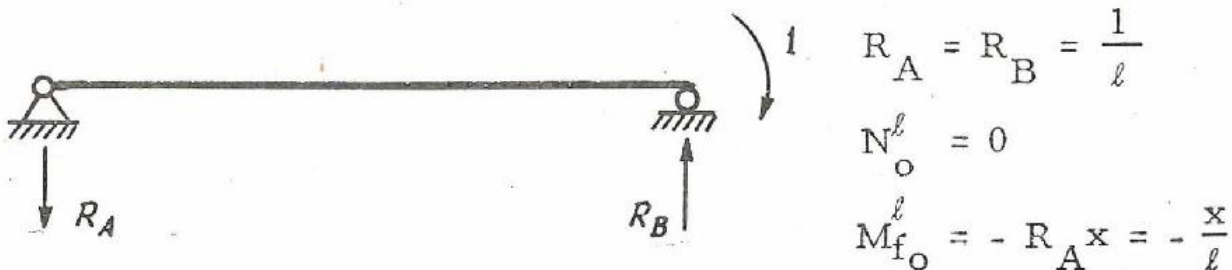
Consideremos como estado I, el estado inicial.

$$N_o^l = 0$$

$$M_{f_o}^l = px \frac{l-x}{2}$$



Consideremos como estado II, el correspondiente a la actuación de un influjo unidad, cuyo movimiento eficaz sea el giro - que queremos calcular.



$$R_A = R_B = \frac{1}{l}$$

$$N_o^l = 0$$

$$M_{f_o}^l = -R_A x = -\frac{x}{l}$$

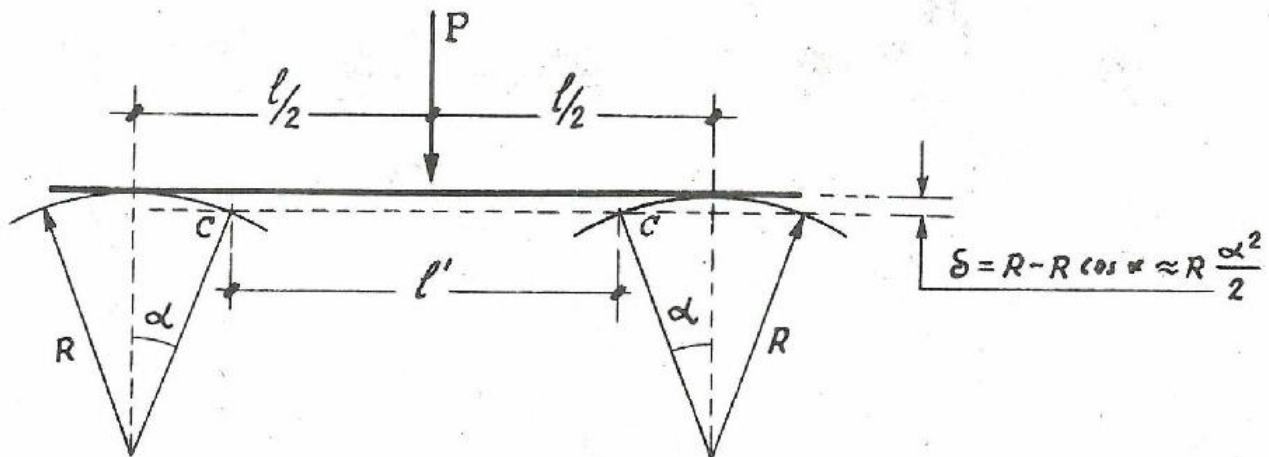
Aplicando el teorema de Castigliano, tenemos :

$$\begin{aligned} \theta_A = \theta_B &= \int_0^l M_{f_I} M_{f_{II}} d\varphi = \\ &= \int_0^l px \frac{l-x}{2} \left(-\frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI} = -\frac{P}{2l EI} \int_0^l (x^2 l - x^3) dx = -\frac{p l^3}{24 EI} \end{aligned}$$

el signo negativo que va en sentido opuesto al que hemos tomado para el influjo.

-o-

21. Determinar la flecha que se produce en el centro de una viga, apoyada en dos superficies cilíndricas iguales de radio R y sometida a una fuerza P en el centro.



Al flectar la viga los puntos de contacto con los apoyos se desplazan hacia el centro, disminuyendo la luz libre entre apoyos. Los puntos c de apoyo definitivos serán aquellos en los que el ángulo α sea igual al ángulo en el apoyo de una viga de longitud l' .

Angulo en el apoyo:

$$\theta = \frac{P l'^2}{16 EI} \quad \text{''} \quad l' = l - 2 R \alpha \rightarrow \alpha = \frac{P (l - 2 R \alpha)^2}{16 EI} \quad (1)$$

La flecha vale

$$y_{\text{máx.}} = \frac{P l'^3}{48 EI} \quad \text{''} \quad \text{siendo } l' = l - 2 R \alpha$$

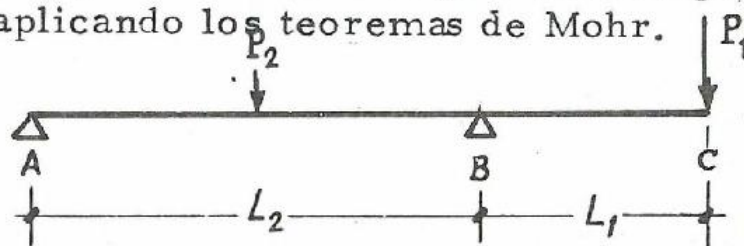
Refiriéndonos a su posición inicial hemos de añadir además el término δ ; luego

$$f = \frac{P (l - 2 R \alpha)^3}{48 EI} = + R \frac{\alpha^2}{2}$$

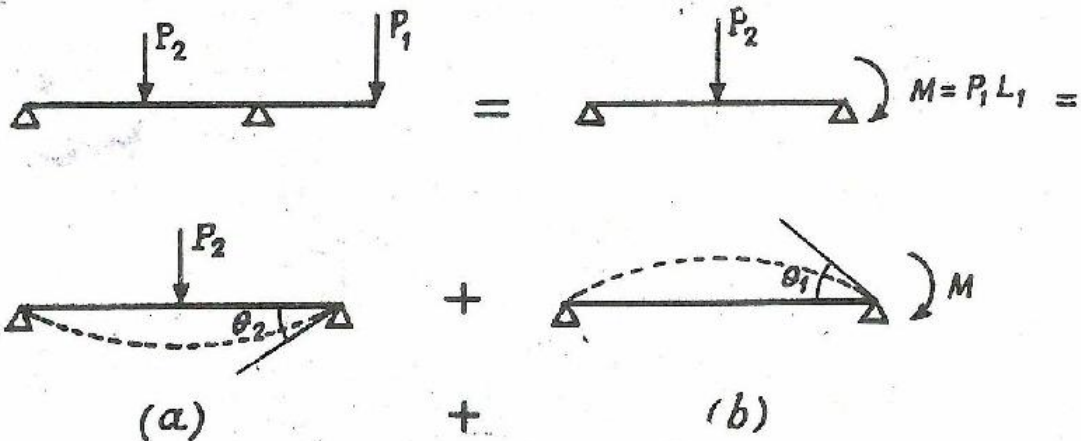
α ,, lo obtenemos de la ecuación (1).

-o-

22. En la figura adjunta calcular el giro de la viga en B y la flecha en C, aplicando los teoremas de Mohr.

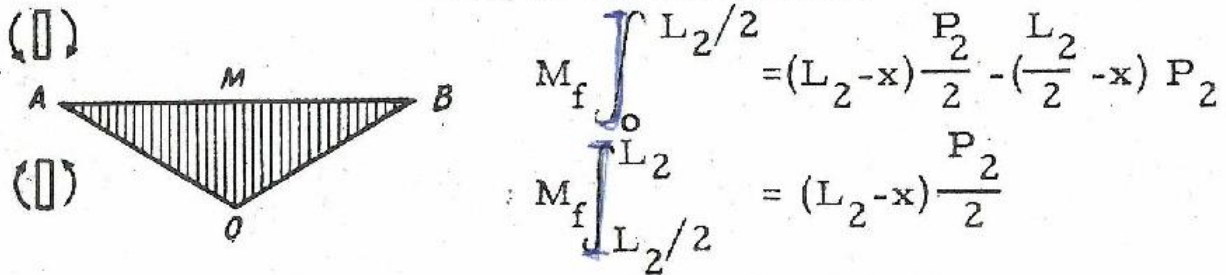


1º) Giros en B. La viga dada puede descomponerse así:



Caso (a) Reacciones $R_1 = R_2 = \frac{P_2}{2}$.

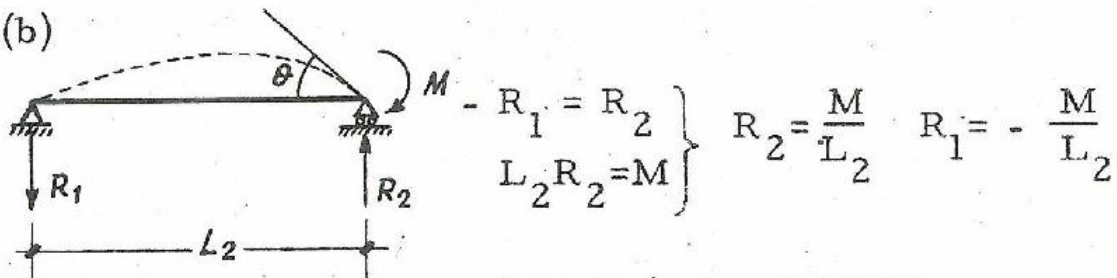
Leyes de momentos:



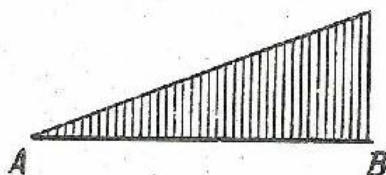
Nos interesa el ángulo ϑ ; aplicaremos Mohr entre el punto B y el punto en el que la deformada tiene tangente horizontal que en este caso es el punto medio de la viga.

$$\vartheta_2 = \frac{\text{Area OMB}}{E \cdot I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2 L_2}{4} \cdot \frac{L_2}{2} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{1}{16} \frac{P_2 L_2^2}{EI}$$

Caso(b)



Leyes de momentos:



$$M_f = (L_2 - x) R_2 - M = -xM$$

Para calcular el ángulo ϑ , por el teorema de Mohr, aplicamos éste entre el punto B y el punto correspondiente al de la de formada con tangente horizontal; punto que pasamos a calcular mediante la elástica.

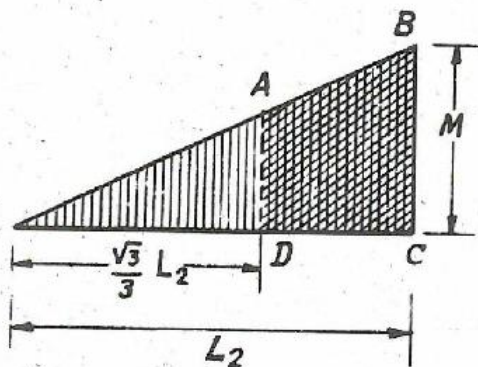
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI} M_f = \frac{1}{EI} (-xM) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \frac{Mx^2}{2} + K_1$$

$$y = -\frac{1}{EI} \frac{Mx^3}{6} + K_1 x + K_2; \text{ condiciones de contorno } \begin{matrix} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=L_2 \rightarrow y=0 \end{matrix}$$

De aquí $K_2 = 0 \quad K_1 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{ML_2^2}{6}$

En el punto con tangente horizontal ocurre que $y' = 0$, luego:

$$y' = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Mx^2}{2} + \frac{ML_2^2}{6} \right) = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} L_2$$



Aplicamos Mohr entre $x = \frac{\sqrt{3}}{3} L_2$ y $x = L_2$

$$\vartheta_1 = \frac{\text{Area ABCD}}{EI} = \frac{\frac{AD+BC}{2} \cdot (L_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} L_2)}{EI} = ML_2 \frac{1}{EI} \frac{2}{3} = P_1 L_1 L_2 \frac{2}{3 EI}$$

El ángulo en B será, por superposición de efectos

$$\vartheta_B = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{1}{16} \frac{P_2 L_2^2}{EI} - \frac{2}{3} \frac{P_1 L_1 L_2}{EI}$$

Por efecto de este ángulo, si no actuara P_1 , el punto C subiría.

$$f'_c = L_1 \vartheta_B = \frac{1}{16} \frac{P_2 L_2^2 L_1}{EI} - \frac{2}{3} \frac{P_1 L_1^2 L_2}{EI}$$

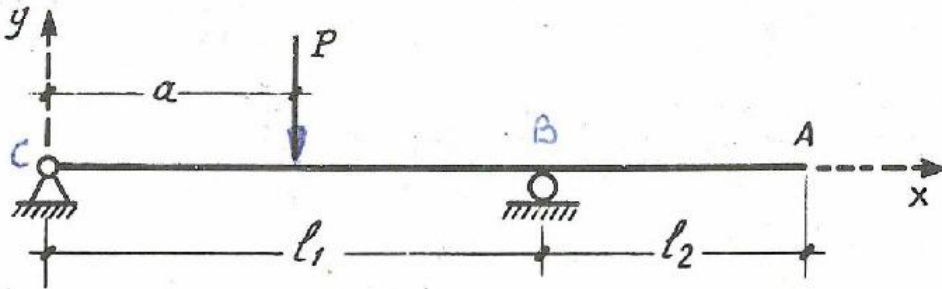
y por efecto del peso P_1 , el tramo L_{14} actuando como una ménsula descende

$$f''_c = \frac{1}{EI} \frac{P_1 L_1}{6}$$

Luego la flecha en C es:

$$f_c = -f'_c + f''_c = \frac{1}{EI} \left[\frac{P_1 L_1^4}{6} - \frac{P_2 L_1 L_2^2}{16} + \frac{2}{3} P_1 L_1^2 L_2 \right]$$

23. Calcular en la viga adjunta la flecha en A.



Utilizaremos el método de Castigliano; la flecha en A, valdrá:

$$v_A = \int_0^{l_1+l_2} M_f^I \cdot M_f^{II} \cdot d\varphi$$

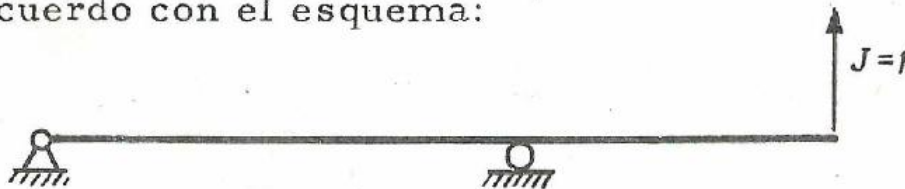
El estado I, será el inicial.

$$M_f^I \Big|_0^a = R_c \cdot x = \frac{P(l_1-x)}{l_1} \cdot x$$

$$M_f^I \Big|_a^{l_1} = R_B \cdot (l_1-x) = \frac{P \cdot a}{l_1} (l_1-x)$$

$$M_f^I \Big|_{l_1}^{l_1+l_2} = 0$$

Los M_f^{II} serán los producidos por un influjo unidad aplicado en A de acuerdo con el esquema:



Así que

$$M_f^{II} \Big|_0^a = M_f^{II} \int_a^{l_1} = R_c \cdot x = + \frac{l_2}{l_1} \cdot x$$

$$M_f^{II} \Big|_{l_1}^{l_1+l_2} = 1 \cdot (l_1 + l_2 l-x)$$

Ahora tendremos:

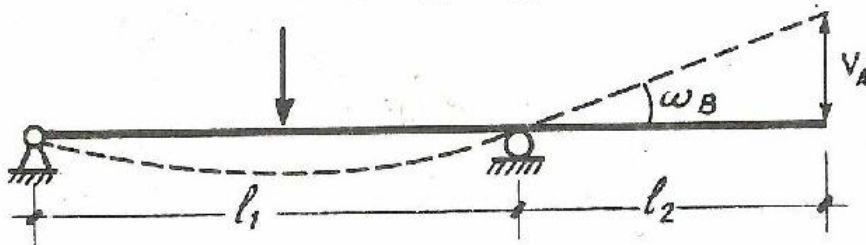
$$v_A = \int_{l_1}^{l_1+l_2} M_f^I M_f^{II} d\varphi = \int_0^a \frac{P(l_1-a)x}{l_1} \cdot \frac{l_2 x}{l_1} \cdot \frac{dx}{EI} +$$

$$+ \int_a^{l_1} \frac{P \cdot a(l_1-x)}{l_1} \cdot \frac{l_2 x}{l_1} \cdot \frac{dx}{EI} + \int_{l_1}^{l_1+l_2} 0 \cdot \frac{(l_1+l_2-x)}{l_1} \cdot \frac{dx}{EI} ;$$

Haciendo las integrales y simplificando, obtenemos:

$$v_A = \frac{P \cdot a l_2}{6 EI l_1} (l_1^2 - a^2)$$

Otra forma más sencilla de calcular v_A es fijándonos que de acuerdo con la figura: $v_A = \omega_B \cdot l_2$.



y utilizando el teorema de Mohr se calcula fácilmente que

$$\omega_B = \frac{P \cdot a (l_1^2 - a^2)}{6 l_1 EI}$$

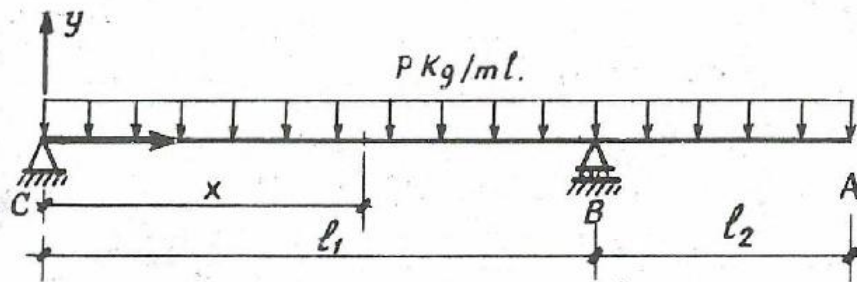
y así obtenemos para v_2 el mismo valor que antes:

$$v_A = \omega_B \cdot l_2 = \frac{P \cdot a (l_1^2 - a^2)}{6 l_1 EI} \cdot l_2$$

24. Calcular en la viga adjunta la flecha en A.

Tomando momentos en c

$$l_1 R_B - \frac{PL^2}{2} = 0 \quad R_B = \frac{PL^2}{2l_1} ; L = l_1 + l_2$$



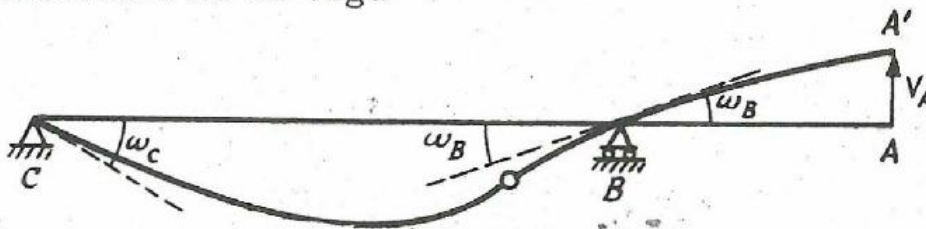
$$R_C = PL - \frac{PL^2}{2l_1} = \frac{PL}{2l_1} (2l_1 - L)$$

Ley de momentos:

$$0 \leq x \leq l_1 \quad M_f = -\frac{PL}{2l_1} (2l_1 - L)x + \frac{Px^2}{2}$$

$$l_1 \leq x \leq L \quad M_f = -\frac{P}{2} (L-x)^2$$

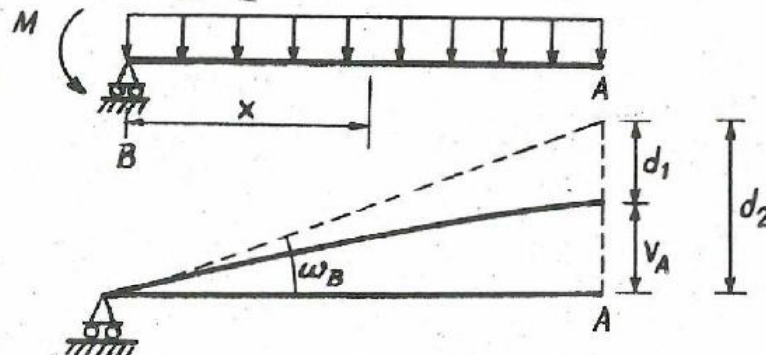
La deformada de la viga



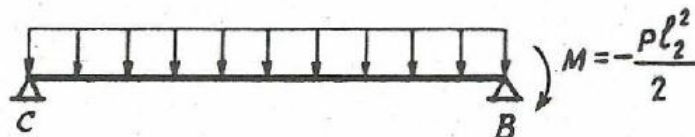
Por Mohr:

$$v_A = d_2 - d_1 = l_2 \omega_B - d_1$$

En la viga BA, tenemos:



El ángulo ω_B lo calculamos en la viga:



$$\omega_B = + \frac{Pl_1^3}{24 EI} - \frac{Pl_2^2 \cdot l_1}{2 \cdot 3EI} = \frac{Pl_1}{24 EI} (l_1^2 - 4l_2^2)$$

En la viga BA

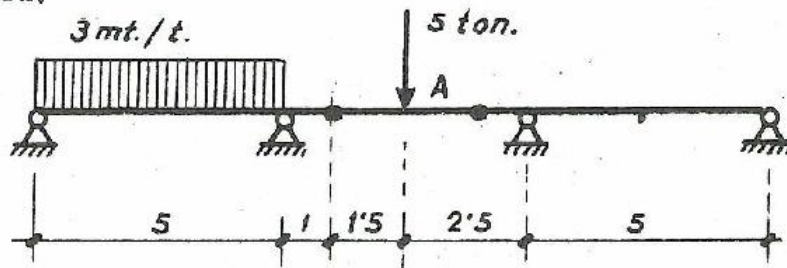
$$d_1 = \frac{1}{EI} \int_0^{l_2} \frac{P(l_2-x)^2}{2} (l_2-x) dx = \frac{-1}{EI} \left[\frac{P(l_2-x)^4}{8} \right]_0^{l_2} = \frac{P}{8 EI} l_2^4$$

Entonces:

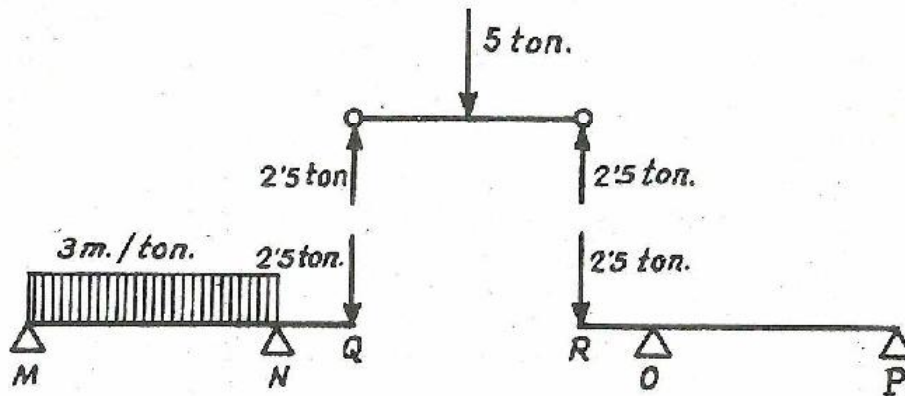
$$v_A = l_2 \omega_B - d_1 = \frac{Pl_1 l_2 (l_1^2 - 4l_2^2)}{24 EI} - \frac{P l_2^4}{8 EI}$$

-o-

2. Determinar y dibujar las leyes de M_f y Q y calcular las flechas en A.



Separaremos el tramo central y calculemos las piezas por separado.



Reacciones en los apoyos:

Tramo izquierdo.

Tomamos momentos en M.

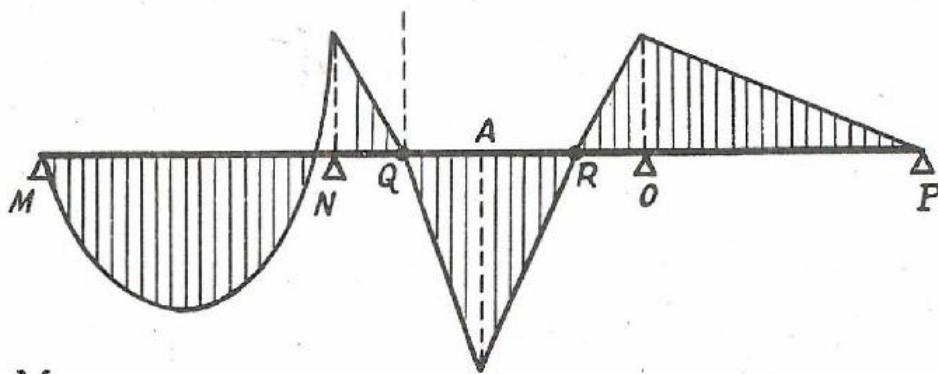
$$2,5 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 2,5 = R_N \cdot 5 \rightarrow R_N = \underline{\underline{10,5}} \text{ Tn.}$$

$$R_M + 10,5 = 15 + 2,5 \rightarrow R_M = 7 \text{ Tn.}$$

Tramo derecho.

Tomamos momentos en P.

$$2,5 \cdot 6 = R_o \cdot 5 \rightarrow R_o = 3 \quad \text{"} \quad R_P = -0,5 \text{ Tn.}$$

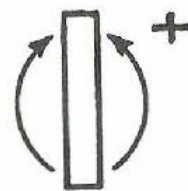


Leyes de M_f .

Tramo A.

$$M_f \Big|_M^N = 7x - \frac{3}{2}x^2$$

$$M_f \Big|_N^O = -15 + \frac{5}{2}x$$



Tramo B.

$$M_f \Big|_O^A = \frac{5}{2}x$$

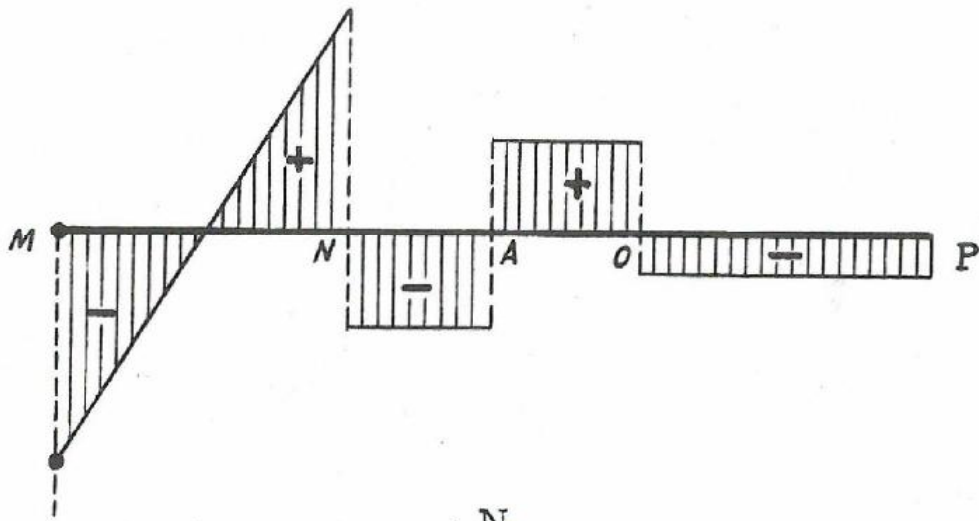
$$M_f \Big|_A^B = \frac{5}{2}(3-x)$$

Tramo C.

$$M_f \Big|_R^O = -\frac{5}{2}x$$

$$M_f \Big|_O^P = \frac{x}{2} - 3$$

Leyes de Q.

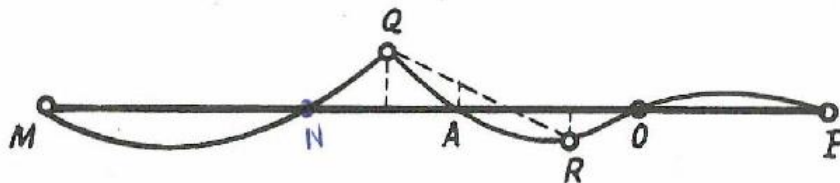


$$Q \begin{cases} N \\ M \\ A \\ N \\ O \\ A \\ P \\ O \end{cases} = \begin{cases} -7 + 3x \\ \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Calculamos la flecha en A.

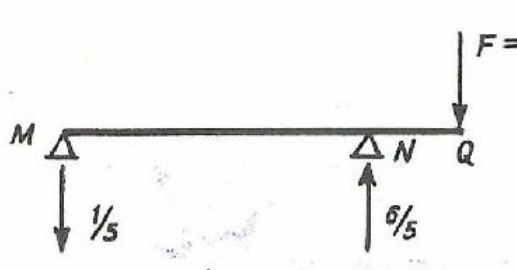
Dibujamos la deformada a estima (Nos fijamos en la ley de M_f).



A la vista de la elástica deducimos que la flecha en A será la suma de la flecha en A estando aislada la parte central más la semisuma de las flechas en O y en R.

Calculos de las flechas.

Flechas en O.

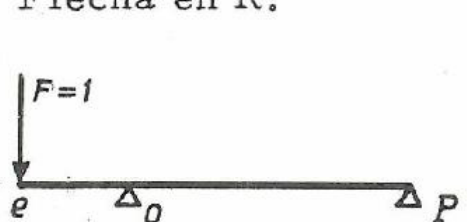


$$M_f^I \Big|_M^N = 7x - \frac{3}{2}x^2 \quad \text{"} \quad M_f^I \Big|_N^Q = \frac{5}{2}(x-6)$$

$$M_f^{II} \Big|_M^N = -\frac{x}{5} \quad \text{"} \quad M_f^{II} \Big|_N^Q = x-6$$

$$M_O = \int_{ed}^{ef} M_f^I M_f^{II} d\varphi = -\frac{85}{8EI} \quad (\text{En sentido contrario al flujo}).$$

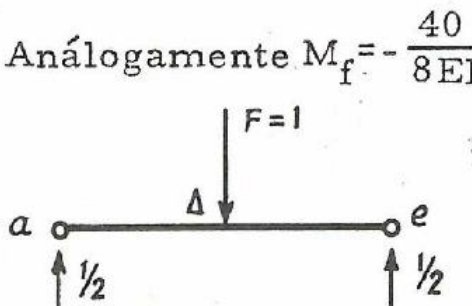
Flecha en R.



$$M_f^I \Big|_R^O = -\frac{5}{2}x \quad \text{"} \quad M_f^I \Big|_O^P = \frac{x-6}{2}$$

$$M_f^{II} \Big|_R^O = -x \quad \text{"} \quad M_f^{II} \Big|_O^P = \frac{x-6}{5}$$

Análogamente $M_f = -\frac{40}{8EI}$



$$M_f^I \Big|_O^A = \frac{5}{2}x \quad \text{"} \quad M_f^{II} \Big|_O^A = \frac{x}{2}$$

$$M_f^I \Big|_A^R = \frac{5}{2}(3-x) \quad \text{"} \quad M_f^{II} \Big|_A^R = \frac{3-x}{2}$$

$$w_{A'} = \frac{45}{16EI}$$

luego la flecha :

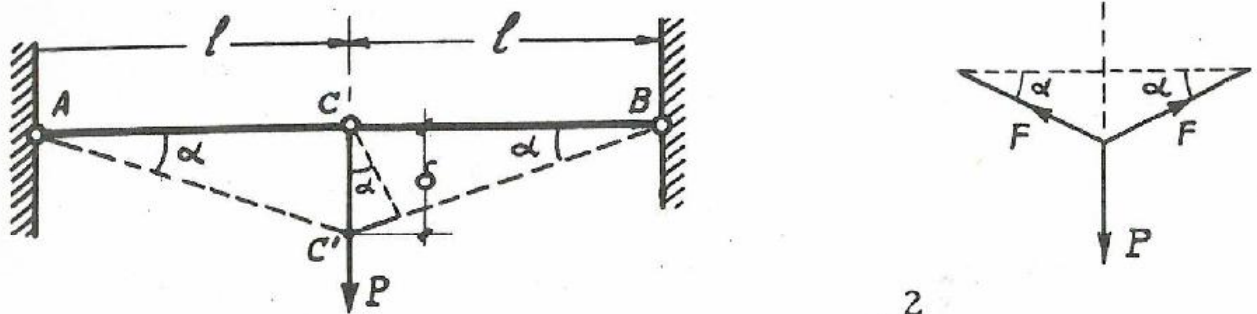
$$w_A = \frac{w_a + w_R}{2} + w_{A'} = \frac{\frac{-85}{8EI} + \frac{40}{8EI}}{2} + \frac{45}{16EI} = 0$$

-o-

26. - Determinar las tensiones que aparecen en las barras de la figura y el desplazamiento del nudo C.

Al deformarse la estructura el punto C pasa a C'. Calculemos el alargamiento unitario de las barras.

$$\left(\frac{l}{\cos \alpha} - l\right) = \Delta l = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{\cos \alpha} - 1.$$



Como α es muy pequeño $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{" luego } \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\alpha^2}{2}$$

La tensión que aparece en las barras con motivo de este alargamiento, será:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \alpha^2}{2} \quad \text{" y la fuerza } F = S \cdot \sigma = \frac{ES \alpha^2}{2} \quad (1)$$

De la condición de equilibrio, obtenemos:

$$P = 2 F \operatorname{sen} \alpha \approx 2 F \alpha$$

Sustituyendo el valor de F dado por (1)

$$P = SE \alpha^3 \quad \rightarrow \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{SE}}$$

el corrimiento $\delta = l \operatorname{sen} \alpha \approx l \alpha$

$$\text{Luego} \quad \delta = l \sqrt[3]{\frac{P}{SE}} = K \sqrt[3]{P}$$

En este caso la deformación δ no es proporcional a la fuerza P. Luego no podemos aplicar el teorema de la energía elástica (Castigliano).

En efecto, propongámonos calcular el corrimiento aplicando el teorema de Castigliano.

$$u = \int_0^\delta P d\delta \quad \text{" } P = \frac{SE \delta^3}{l^3} \quad \text{"}$$

luego:

$$u = \frac{SE}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{SE \delta^4}{4 l^3} = \frac{P\delta}{4} = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{SE}}$$

El corrimiento en la dirección de P será:

$$\frac{du}{dP} = \frac{d}{dP} \left[\frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{SE}} \right] = \frac{1}{3} l \sqrt[3]{\frac{P}{SE}} = \frac{\delta}{3} \neq \delta$$

luego en los casos en que la energía no es una función de 2º grado en P o que los corrimientos no son proporcionales a P (que es lo mismo) NO PUEDE APLICARSE CASTIGLIANO.

5-1. - VIGAS HIPERESTATICAS. - 5-2. - VIGAS CONTINUAS. - TEO-
RIA DE LOS TRES MOMENTOS. - UTILIZACION DE ABACOS.
DESCENSOS DE APOYOS.

-o-

5-1. - VIGAS HIPERESTATICAS. - Sabemos que una estructura es hiperestática cuando el número de incógnitas (coacciones) es mayor que el de ecuaciones independientes que podemos obtener de ella: En este apartado vamos a tratar de una pieza hiperestática, es decir, el número de coacciones es mayor de 3.

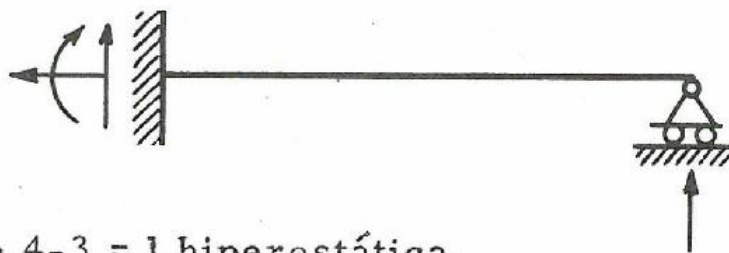
Tipos de piezas hiperestáticas. a). Para fuerzas verticales, es isostática (las reacciones horizontales que aparecen con motivo de la deformación de la pieza las despreciamos).



Si las fuerzas aún actuando en el plano de simetría no son verticales tenemos: 4 incógnitas y 3 ecuaciones.

El número de hiperestáticas es: número de incógnitas menos el número de ecuaciones.

En este caso $4 - 3 = 1$ hiperestática.



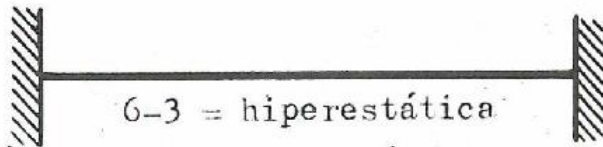
En este caso $4 - 3 = 1$ hiperestática.

b)



$5 - 3 = 2$ hiperestática.

d)



• A veces el número de hiperestáticas puede reducirse por no tener las fuerzas componente en una dirección, como en el caso a).

Factores que deben tenerse en cuenta para la resolución del problema hiperestático.

El problema puede abordarse de dos maneras distintas.

- 1º) a. Se liberan los enlaces necesarios para hacer la pieza isostática.
 - b. Determinamos los movimientos eficaces de los enlaces liberados.
 - c. Consideramos la pieza isostática descargada e introducimos unos influjos, cuyo valor determinamos con la condición de que anule los movimientos eficaces calculados en el apartado b.
- 2º) Consideramos la pieza isostática cargada, añadiendo los influjos necesarios, y de valores tales que anulen los movimientos de los enlaces liberados.

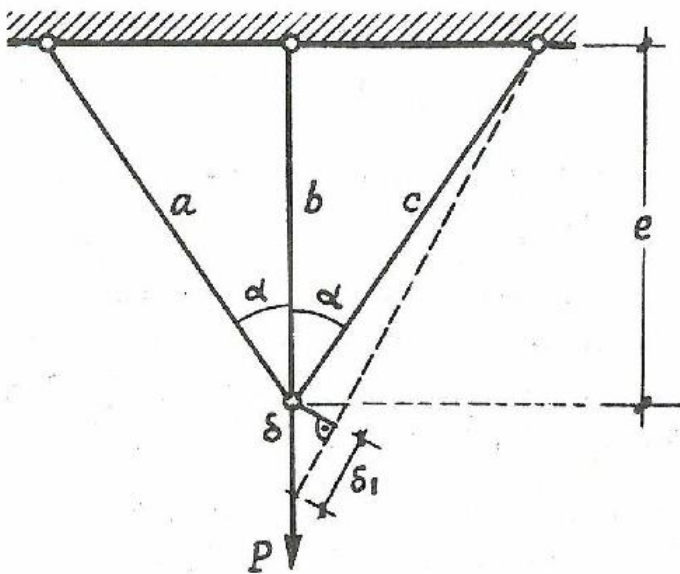
Entonces al no haber movimientos eficaces, determinamos las hiperestáticas, expresando que la derivada de la energía elástica respecto del influjo sea cero.

Nota: En el caso de descenso de apoyos o apoyos elásticos, el apoyo nos dará una ecuación que combinada con la ecuación hiperestática nos da el valor de la hiperestática buscada.

-o-

1. - Determinar los esfuerzos en las barras al aplicar un peso P como se indica en la figura.

Como se trata de un sistema indeterminado estáticamente hay que recurrir a las deformaciones.



Imaginemos que la barra "b" sufre un alargamiento δ , las barras "a" y "c" sufren un alargamiento δ_1 .

De la figura deducimos que

$$\delta_1 = \delta \cos \alpha \quad (1)$$

Del equilibrio de las fuerzas en dirección vertical, obtenemos:

$$\Sigma Y + P = 0 \rightarrow Y_b + 2 Y_a = P \quad (2)$$

Sea E_b y $E_a = E_c$ los módulos de elasticidad de las barras, y pongamos las fuerzas en función de las defor-

maciones:

$$\delta = \epsilon \cdot l ; \epsilon = \frac{\delta}{l} \rightarrow \epsilon \cdot E_b = E_b \frac{\delta}{l} = \frac{Y_b}{S_b}$$

luego,

$$\delta = \frac{Y_b \cdot l}{S_b E_b}$$

Análogamente

$$\delta_1 = \frac{F_a \cdot l}{S_a E_a \cos \alpha} = \frac{F_c \cdot l}{S_c E_c \cos \alpha}$$

Sustituyendo en (1)

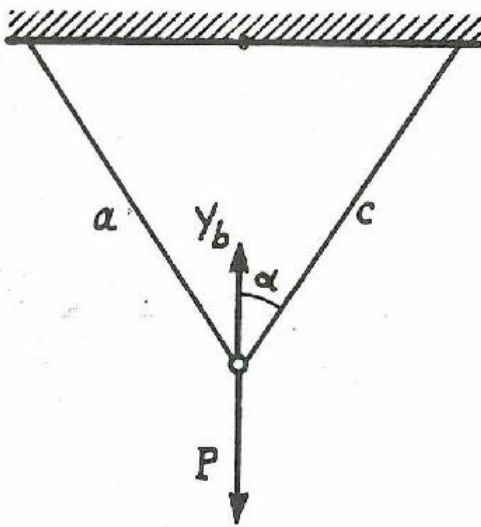
$$\cos \alpha \frac{Y_b \cdot l}{S_b E_b} = \frac{F_a \cdot l}{S_a E_a \cos \alpha} \quad F_a = \frac{S_a E_a}{S_b E_b} \cos^2 \alpha \cdot Y_b$$

y entrando en (2)

$$Y_b + 2 \frac{S_a E_a}{S_b E_b} \cos^3 \alpha \cdot Y_b = P$$

$$Y_b = \frac{P}{1 + 2 \frac{S_a E_a}{S_b E_b} \cos^3 \alpha}$$

Otro procedimiento, de determinar los esfuerzos es mediante la aplicación de la energía elástica.



1º. Hacemos el sistema isostático eliminando la barra central e introduciendo la hiperestática Y_b tal como indica la figura.

En las barras indicadas aparecen unas fuerzas $F_a = F_c$ tal que:

$$2 F_a \cos \alpha = P - Y_b$$

$$F_a = \frac{P - Y_b}{2 \cos \alpha}$$

La energía elástica del sistema será: $u = F \delta$,

$$u_1 = \left(\frac{P - Y_b}{2 \cos \alpha} \right)^2 \cdot \frac{l}{S_a E_a \cos \alpha}$$

Su derivada respecto a Y_b nos da el corrimiento del sistema en dicha dirección

$$\frac{\partial u_1}{\partial Y_b} = - \frac{P - Y_b}{2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{l}{S_a E_a} = \delta$$

El signo (-), indica que el corrimiento se ha realizado en dirección contraria a la de Y_b .

Este corrimiento ha de ser igual al que sufre la barra "b" por la acción de Y_b que es:

$$\frac{Y_b \cdot l}{S_b E_b} = \delta$$

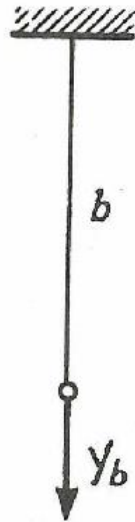
Igualando en magnitud, tenemos:

$$\frac{P - Y_b}{2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\lambda}{S_a E_a} = \frac{Y_b \lambda}{S_b E_b}$$

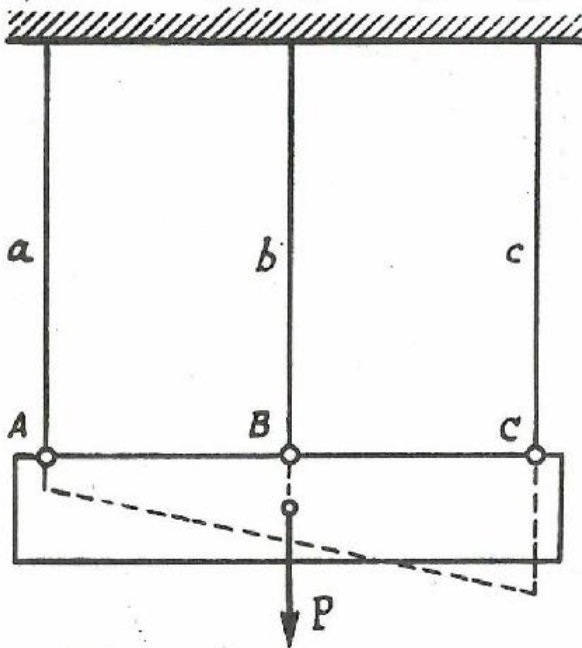
$$P = 2 \frac{Y_b S_a E_a}{S_b E_b} S^3 \alpha + Y_b \rightarrow$$

$$\rightarrow Y_b = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_a S_a}{S_b E_b} \cos^3 \alpha}$$

-o-



2. Determinar los esfuerzos en las barras de la figura, siendo el cuerpo soportado de rigidez infinita (no se deforma), los tres alambres son de longitud l y sección y módulo de elasticidad S_a, E_a, S_b, E_b y S_c, E_c respectivamente.



De la ec. de la estática, obtenemos:

$$Y_a + Y_b + Y_c = P$$

Sean los desplazamientos δ_a, δ_b y δ_c , las fuerzas serán:

$$Y_a = S_a \frac{E_a \delta_a}{l} \quad Y_b = S_b \frac{E_b \delta_b}{l} \quad Y_c = S_c \frac{E_c \delta_c}{l}$$

$$\delta_a = \frac{Y_a l}{E_a S_a} \quad \delta_b = \frac{Y_b l}{E_b S_b} \quad \delta_c = \frac{Y_c l}{E_c S_c}$$

Obligamos a que los desplazamientos estén alineados.

$$2 \delta_b = \delta_a + \delta_c \quad \frac{2 Y_b}{E_b S_b} = \frac{Y_c}{E_c S_c} + \frac{Y_a}{E_a S_a}$$

Tomando momentos en B, obtenemos que:

$$Y_a = Y_c$$

luego:

$$Y_b + 2 Y_a = P$$

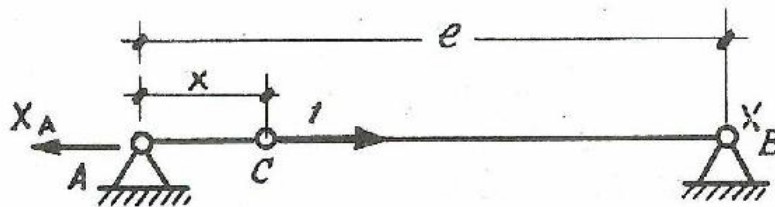
$$\frac{2 Y_b}{E_b S_b} = Y_A \left[\frac{1}{E_c S_c} + \frac{1}{E_a S_a} \right]$$

$$Y_a = Y_c = \frac{P}{\frac{E_b S_b (E_c S_c + E_a S_a)}{2 E_c S_c E_d S_a} + 2}$$

$$Y_b = P - 2 Y_a$$

-o-

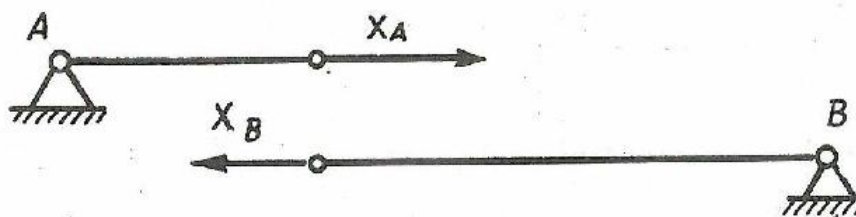
3. Determinar las reacciones en los apoyos de la viga representada, bajo la acción de una carga unidad actuando en un punto genérico a la distancia "x" del apoyo izquierdo



De la estática obtenemos $\bar{X}_A + \bar{X}_B + \bar{1} = 0$ (1)

Por tratarse de una viga hiperestática horizontalmente, necesitamos recurrir a las deformaciones, para obtener una relación entre X_A y X_B

- 1º. Procedimiento. - Imaginemos la barra cortada por C.



La fuerza unidad, la imaginamos descompuesta en dos fuerzas X_A y X_B , " la primera produce un alargamiento del trozo izquierdo, la derecha un alargamiento del derecho, y como los puntos A y B no se mueven, el alargamiento total de la viga ha de ser nulo.

alargamiento $\delta = \epsilon \cdot x$ " $E \cdot \epsilon = \frac{X_A}{S_A}$ " $\delta = \frac{X_A}{E} \cdot \frac{x}{S_A}$

$$\text{acortamiento } \delta = \varepsilon (\ell - x). \quad E\varepsilon = \frac{X_B}{S_A} \rightarrow \delta = \frac{X_B}{E} \frac{(\ell - x)}{S_A}$$

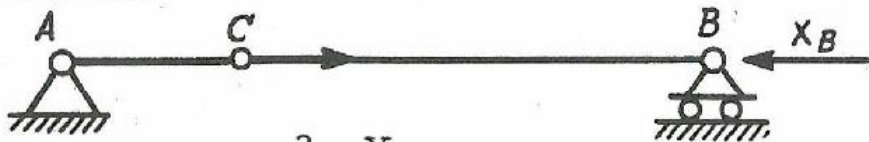
Igualando:

$$\frac{X_A}{\cancel{E}} \frac{x}{S_A} = \frac{X_B}{\cancel{E}} \frac{(\ell - x)}{S_A} \quad \text{" } \frac{X_A}{X_B} = \frac{\ell - x}{x}$$

que con (1) nos permite determinar X_A y X_B .

2º. Procedimiento.

Como siempre la convertimos en isostática (apoyo derecho) y expresamos que la derivada de la energía elástica respecto a la fuerza es nula.



$$\text{Tramo AC} \rightarrow u_1 = (1 - X_B)^2 \cdot \frac{X}{SE}$$

$$\text{Tramo CB} \rightarrow u_2 = X_B^2 \frac{(\ell - x)}{SE}$$

$$u = u_1 + u_2 = (1 - X_B)^2 \frac{X}{SE} + X_B^2 \frac{\ell - x}{SE}$$

$$\frac{\partial u}{\partial X_B} = 0 = -2(1 - X_B) \frac{X}{SE} + 2X_B \frac{(\ell - x)}{SE} = 0$$

$$(1 - X_B)X = X_B(\ell - x) \rightarrow X_B = \frac{X}{\ell}$$

Análogamente

$$X_A = \frac{(\ell - X)}{\ell}$$

luego,

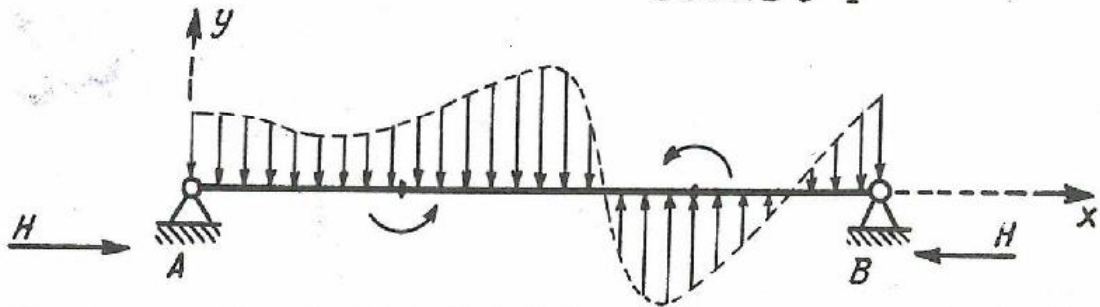
$$\frac{X_B}{X_A} = \frac{X}{\ell - X}$$

Igual que anteriormente.

4. Determinar la reacción horizontal que se produce en una viga

biarticulada sometida a una ley cualquiera de cargas verticales y de momentos contenidas en el plano de simetría de la viga que contiene a la directriz.

ESTADO I



Consideremos el estado inicial de cargas como estado I; obtendremos en él las siguientes leyes de esfuerzos.

$$M_{f_0}^x = F(x)$$

$$Q_0^x = Q(x)$$

$$N_0^x = 0$$

Consideremos como estado II el correspondiente a la actuación de una reacción hiperestática horizontal unidad.



En él tendremos las siguientes leyes de esfuerzos:

$$M_{f_0}^x = 0 \quad Q_0^x = 0 \quad N_0^x = 1 \quad \rightarrow \boxed{\leftarrow}$$

Aplicando el teorema de Castigliano tenemos el corrimiento horizontal del punto B.

$$u_B = \int_{ed}^{ef} M_{f_I} M_{f_{II}} d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_I N_{II} d\varepsilon + H \left[\int_{ed}^{ef} M_{f_{II}}^2 d\varphi + \int_{ed}^{ef} N_{II}^2 d\varepsilon \right]$$

En esta expresión:

$$u_B = 0 \quad \text{debido a la coacción de los apoyos que impide el desplazamiento horizontal.}$$

$$M_{f_{II}} = 0 ; N_I = 0$$

Por tanto, obtenemos:

$$H \cdot \int_{ed}^{ef} d\varepsilon = 0$$

Como la integral no es nula quiere decir que la reacción horizontal es cero:

$$H = 0$$

Esta conclusión es la que nos ha permitido tratar a las vigas biarticuladas (hiperestáticas) como si fueran isostáticas.

- En la realidad existe una reacción horizontal cuyo cálculo - puede abordarse mediante la ecuación de la elástica.

Habíamos obtenido

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{EI}$$

siendo $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$

y habíamos expresado que al ser y' muy pequeña frente a uno, podíamos suponer $\rho = 1/y''$.

Si no hacemos esta simplificación y partimos de la ecuación diferencial

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M_f}{EI}$$

podemos llegar a obtener la reacción horizontal.

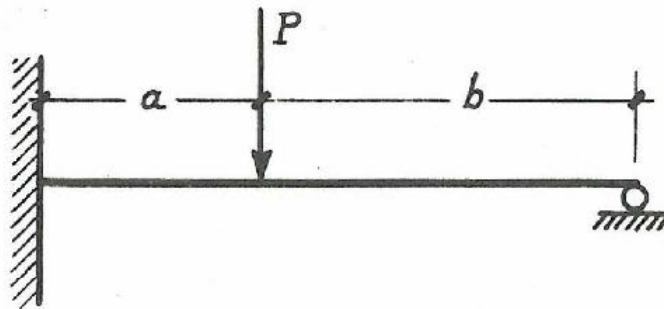
El fundamento del cálculo exacto está basado pues en considerar la influencia de la deformación de la estructura en los esfuerzos que aparecen en ella y, por tanto, no podemos aplicar el teorema de Castigliano como hemos realizado anteriormente, razón por la que el resultado obtenido con él no es completamente correcto.

No obstante el valor que se obtiene para la reacción horizor

tal es bastante pequeño y no produce tensiones comparables a las de flexión o cortante; por ello, se puede admitir que efectivamente es cero y únicamente se tendrá en cuenta en vigas de gran luz.

-o-

5. Determinar las reacciones, dibujar las leyes de M_f y Q y la elástica, indicando los puntos notables de ésta, (inflexiones y puntos de tangente horizontal).



Vamos a aplicar el primer procedimiento:

19. Liberamos una coacción, ya que la pieza es hiperestática en un grado solamente.

Tenemos libertad para liberar la coacción, luego hemos de meditar antes de liberar; en este caso es muy sencillo y no nos producirá ninguna complicación, cualquiera que sea la que liberemos.

Liberamos la coacción que nos impide el giro en el apoyo izquierdo.

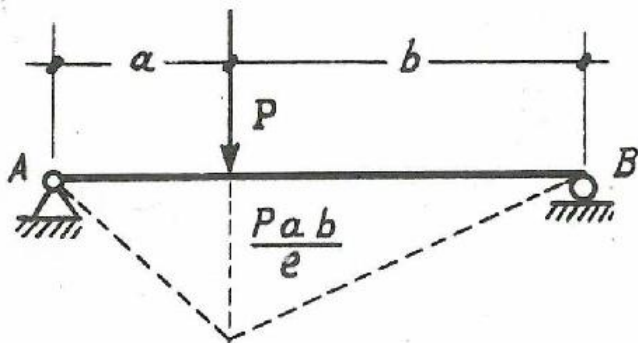
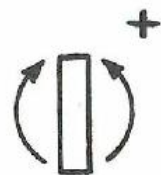
Reacciones:

$$R_A = \frac{Pb}{l} \quad R_B = \frac{Pa}{l} \quad a+b = l$$

Ley de M_f isostáticos:

$$M_f \Big|_0^a = \frac{Pb}{l} x$$

$$M_f \Big|_a^l = \frac{Pa}{l} (l-x)$$



Aplicamos el teorema de Mohr, para calcular el giro en el apoyo izquierdo.

$$\theta_A = \frac{1}{EI\ell} \int_0^{\ell} M_{fx} \cdot (\ell - x) dx = \frac{1}{EI\ell} \frac{1}{2} \frac{Pab}{\ell} \cdot \frac{\ell+b}{3} = \frac{1}{6EI\ell} Pab (\ell+b)$$

He expresado que la integral es igual, al momento del área de la ley de M_f aplicada en el centro de gravedad respecto del mismo punto.

Como el apoyo izquierdo en realidad no gira, hemos de introducir un momento que nos dé un giro igual y de sentido contrario.



Aplicando el teorema de Mohr:

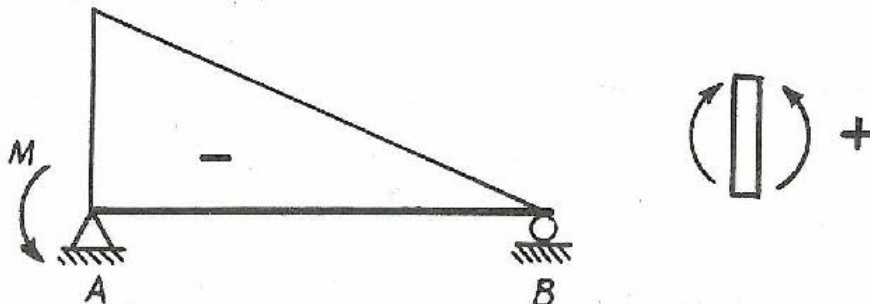
$$\theta = \frac{1}{EI\ell} \int_0^{\ell} M_{fx} (\ell - x) dx = \frac{1}{EI\ell} \cdot \frac{1}{2} M\ell \cdot \frac{2}{3} \ell = \frac{1}{3EI\ell} M\ell$$

luego:

$$\frac{1}{3EI} M\ell = \frac{1}{6EI\ell} Pab (\ell+b).$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{Pab (\ell+b)}{\ell^2} = Pb \frac{(\ell^2 - a^2)}{2\ell^2} "$$

que como se ve en la figura, es negativo.



Reacciones debidas al momento hiperestático:

$$- R_B = + R_A = \frac{M}{\ell} "$$

sentido positivo de las fuerzas hacia arriba.

La ley de M_f hiperestáticos es la representada, su expresión analítica:

$$M_{fH} \Big|_0^l = - \frac{M}{l} (l-x) \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{+} \end{array} \right)$$

La suma de las leyes isostáticas e hiperestáticas nos da el estado final.

Leyes de M_f :

$$M_f \Big|_0^a = \frac{Pb}{l} x - \frac{M}{l} (l-x) \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{+} \end{array} \right)$$

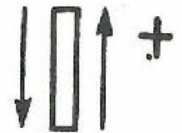
$$M_f \Big|_a^l = \frac{Pa}{l} (l-x) - \frac{M}{l} (l-x)$$

Leyes de cortantes:

$$R_B = \frac{Pa}{l} - \frac{M}{l} = \frac{1}{l} (Pa-M)$$

$$Q \Big|_0^a = - P + \frac{1}{l} (Pa-M)$$

$$Q \Big|_a^l = \frac{1}{l} (Pa-M)$$



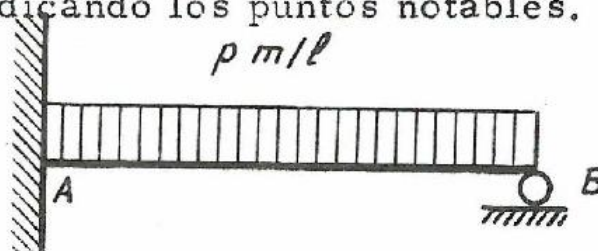
Elástica.

Del empotramiento sale con tangente horizontal.

El punto de inflexión corresponde con un $M_f = 0$.

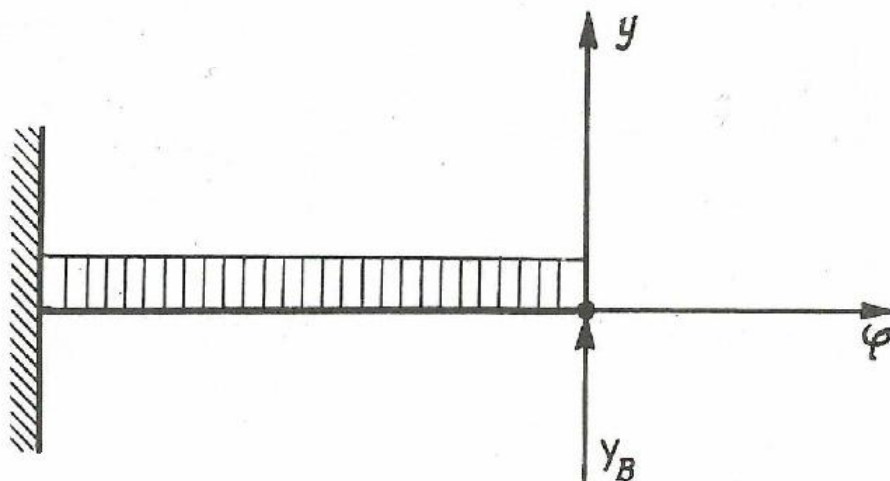
-o-

6. Determinar: Reacciones, leyes de M_f y Q , dibujar la elástica a estima indicando los puntos notables.



Utilizaremos el teorema de Castigliano.

Para ello elegimos como hiperestática, la reacción frontal y los ejes tal como los indicados en la figura.



Podemos seguir dos procedimientos.

- 1º. Considerar la hiperestática como influjo.
- 2º. Considerarla como fuerza exterior. En este caso habría que introducir un influjo unidad, que posteriormente anularíamos. En este ejercicio consideraremos el primer procedimiento.

El teorema de Castigliano expresa:

$$\frac{\partial \xi}{\partial J} = m_j ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial J} = \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial J} d\varphi$$

En nuestro caso tomando momentos flectores positivos (\square) tenemos:

$$M_f^0 = -p \frac{x^2}{2} - Y_B x$$

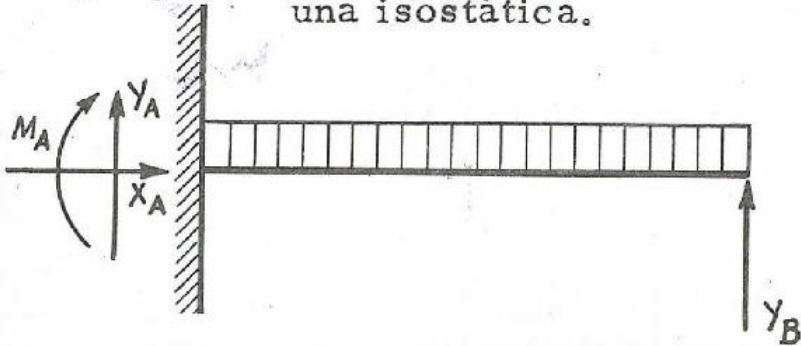
$$\frac{\partial M_f}{\partial Y_B} = -x ; \quad m_j = 0 \quad (\text{El apoyo no se mueve}).$$

luego:

$$0 = \int_{-l}^0 (-p \frac{x^2}{2} - Y_B x)(-x) dx \frac{1}{EI} = \frac{1}{EI} \int_{-l}^0 (p \frac{x^3}{2} + Y_B x^2) dx =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{px^4}{8} + Y_B \frac{x^3}{3} \right]_0^{-l}$$

$y_B = \frac{3}{8} pl$, con lo que tenemos reducida la viga hiperestática a una isostática.



Reacciones:

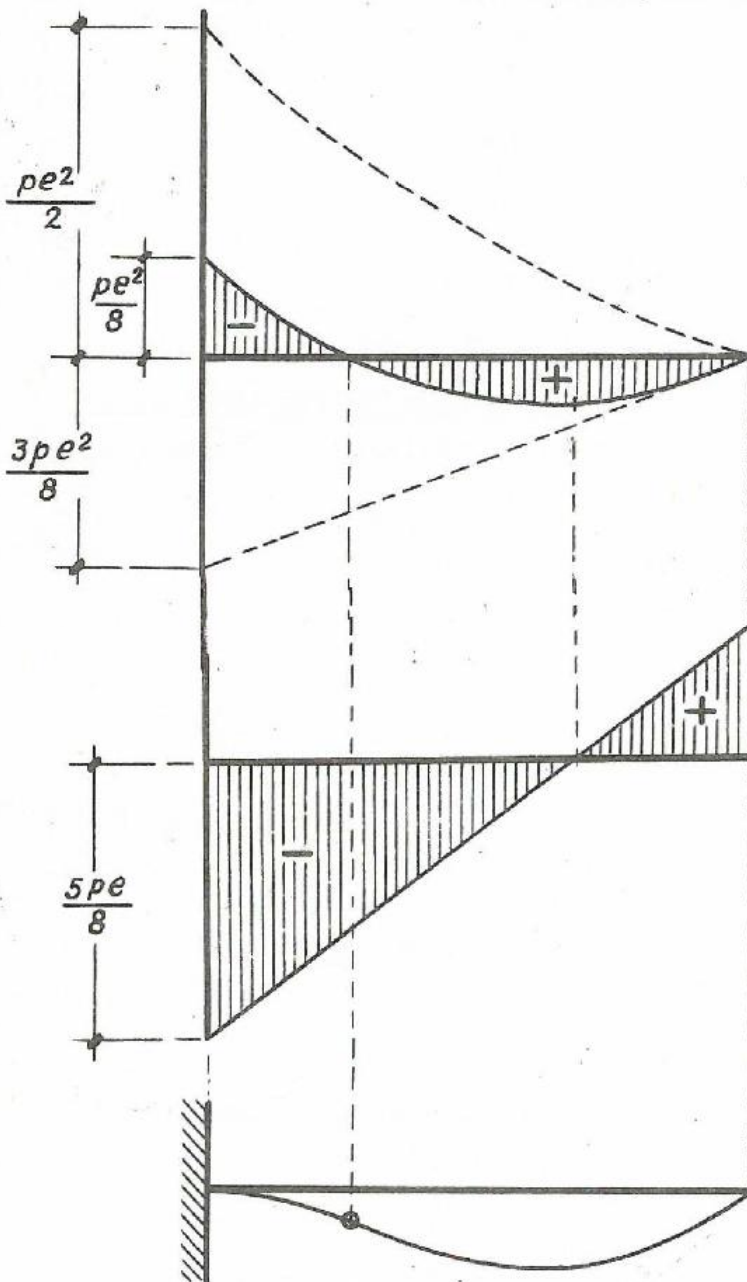
$$Y_A = pl - \frac{3}{8} pl = \frac{5}{8} pl$$

$$X_A = 0$$

$$M_A = -\frac{pl^2}{2} + \frac{3}{8} pl \cdot l = -\frac{pl^2}{8}$$

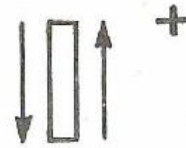
Ley de $M_f \Big|_l^0 = p \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8} plx$ (parábola).

(□)



Ley de Q

$$Q \Big|_l^0 = \frac{3}{8} pl - px = p \left(\frac{3}{8} l - x \right) \text{ (recta)}$$

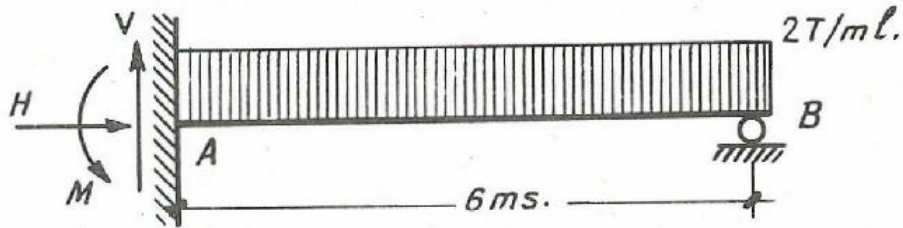


Elástica.

Empotramiento \rightarrow tangente horizontal.

$M_f = 0 \rightarrow$ Punto de inflexión.

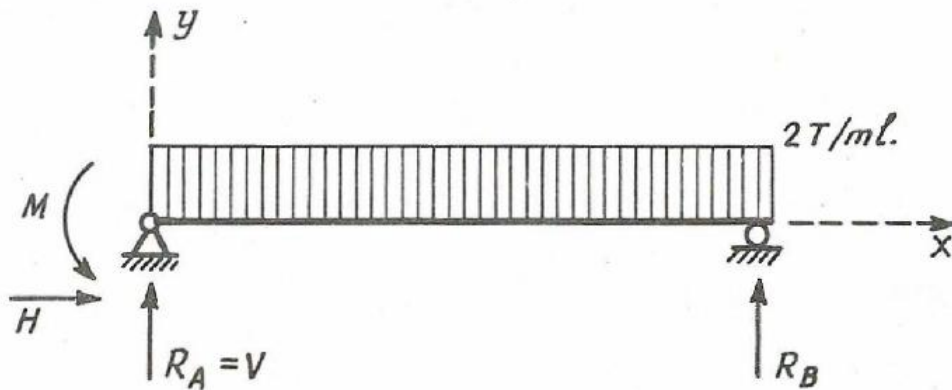
7. Determinar la flecha máxima de la viga indicada en la figura.



En el ejemplo anterior habíamos determinado que el momento de empotramiento vale :

$$M = \frac{p l^2}{8} = \frac{2 \cdot 36}{8} = 9 \text{ m. T}$$

Por tanto podemos reducir la estructura dada hiperestática a la siguiente isostática.



hecho esto, podremos calcular las deformaciones como hemos realizado en las estructuras isostáticas.

Determinamos las reacciones:

$$R_A = 7,5 \text{ T.} \quad R_B = 4,5 \text{ T.}$$

La ley de momentos flectores será:

$$\left(\begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \quad M_{f_0}^l = R_B (l - x) - p \frac{(l - x)^2}{2} = 4,5 (6 - x) - (6 - x)^2$$

La ecuación diferencial de la elástica será:

$$y'' = \frac{M_f}{EI} = \frac{1}{EI} [4,5 (6 - x) - (6 - x)^2]$$

$$y' = \frac{1}{EI} \left[-\frac{4,5}{2} (6 - x)^2 + \frac{(6 - x)^3}{3} \right] + c_1$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[\frac{9}{12} (6-x)^3 - \frac{(6-x)^4}{12} \right] + c_1 x + c_2$$

Determinamos las constantes c_1 y c_2 mediante las condiciones de contorno.

$$\text{Para } x = 0 ; \quad y = 0 \qquad \text{Para } x = 6 ; \quad y = 0$$

La condición de contorno, $y' = 0$ para $x = 0$, se cumple, al satisfacerse las otras dos anteriores, ya que el momento de empotramiento le hemos determinado con la condición de que la tangente en el origen fuese horizontal.

Obtenemos:

$$c_1 = \frac{9}{EI} , \quad c_2 = -\frac{54}{EI}$$

la ecuación de la elástica será, pues,

$$y = \frac{6-x}{EI} \left[\frac{9}{12} (6-x)^2 - \frac{1}{12} (6-x)^3 - 9 \right]$$

El máximo lo obtendremos haciendo $y' = 0$

$$2x^3 - 22,5 x^2 + 54 x = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones:

$$x_1 = 0 ; \quad x_2 = 7,775 ; \quad x_3 = 3,475$$

$x_1 = 0$ corresponde al empotramiento como es lógico.

x_2 no es posible.

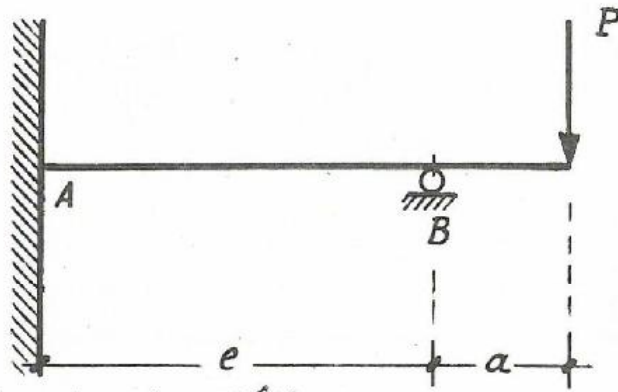
para $x_3 = 3,475$, obtenemos $y = \frac{14}{EI}$ ms.

en cuya fórmula expresaremos E en T/m^2 I en m^4 .

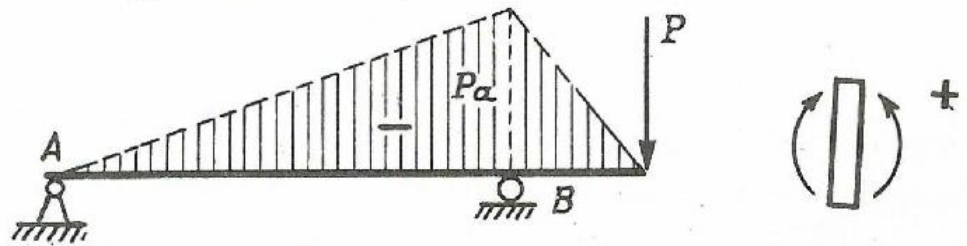
-o-

8. Determinar, reacciones, leyes de M_f y Q , dibujo de la elástica y estima.

Emplearemos el teorema de Mohr.



Ley de M_f en la viga isostática.



Giro en A.

$$\vartheta_A = \frac{1}{EI\ell} \frac{P \cdot a \cdot \ell}{2} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{1}{6EI} P \cdot a \ell = \frac{P \cdot a \ell}{6EI} \quad (1)$$



Giro en A. Al actuar un momento M .

$$\vartheta_A = \frac{1}{2} \frac{M\ell}{EI} \cdot \frac{2\ell}{3} = \frac{M\ell}{3EI} \quad (2)$$

Iguando (1) y (2) $\rightarrow M = \frac{Pa}{2}$

Reacciones: $R_B = P \left(\frac{3a}{2\ell} + 1 \right)$

$$R_A = -P \frac{3a}{2\ell}$$

Ley de M_f

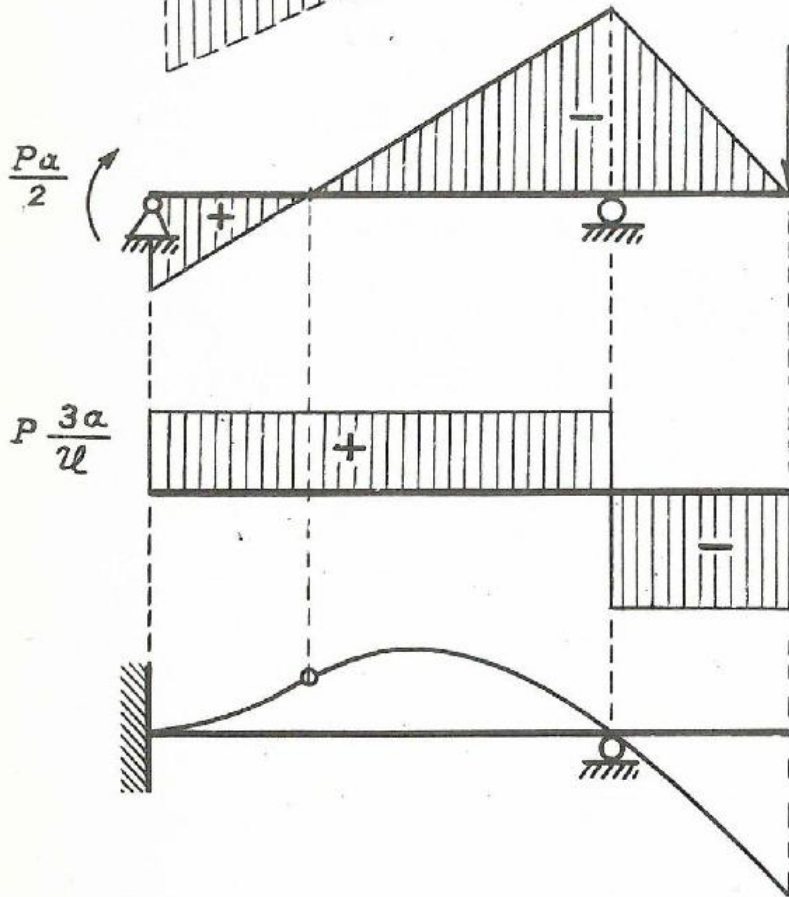
Ley de Q

$$P \left(\frac{3a}{2\ell} + 1 \right)$$

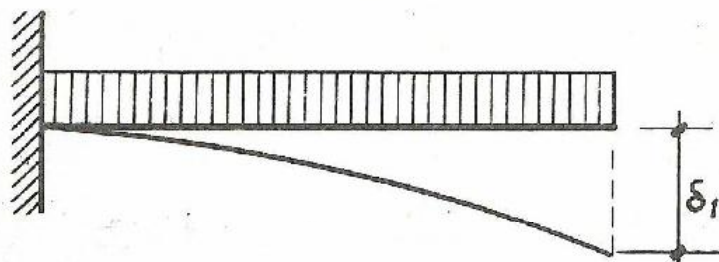
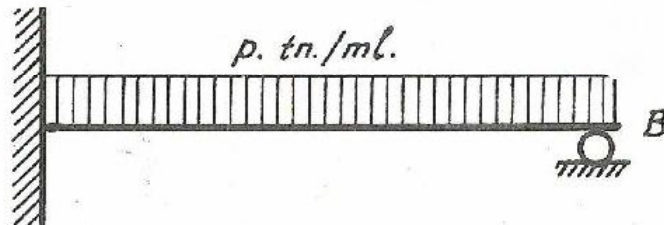
Elástica.

Empotramiento \rightarrow tangente horizontal.

$M_f' = 0 \rightarrow$ Inflexión.



9. Determinar la reacción R_B en una viga cargada uniformemente, si el apoyo B es elástico, es decir, la reacción del apoyo es proporcional al descenso. $R_B = k\delta$.



Descenso de la viga hecha isostática,

$$\delta_1 = \frac{p l^4}{8 EI}$$



Por efecto de R_B , el extremo sufre un movimiento,

$$\delta_2 = \frac{R_B l^3}{3 EI}$$



El estado final es un descenso

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{p l^4}{8 EI} - \frac{R_B l^3}{3 EI}$$

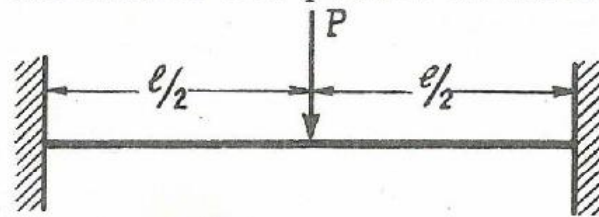
y como $R_B = k\delta$ " tenemos:

$$\frac{R_B}{k} = \frac{p l^4}{8 EI} - \frac{R_B l^3}{3 EI}$$

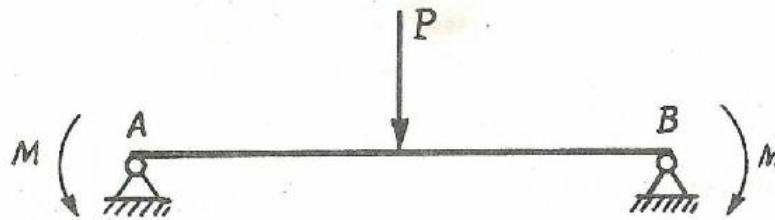
o sea:

$$R_B = \frac{3}{8} p l \frac{1}{1 + \frac{3 EI}{k l^3}}$$

10. Determinar: Reacciones, leyes de M_f y Q , dibujar la elástica a estima indicando los puntos notables.



La convertimos en isostática.



Por simetría ambos momentos son iguales y de sentido contrario.

Giro en un extremo debido a la carga P.

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{Pl}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{Pl^2}{16} \quad (1)$$

Giro en un extremo por la acción de los momentos hiperestáticos.

$$\vartheta = \frac{Ml}{6EI} + \frac{Ml}{3EI} = \frac{Ml}{2EI} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) $\rightarrow \frac{Ml}{2EI} = \frac{Pl^2}{16EI} \rightarrow M = \frac{Pl}{8}$

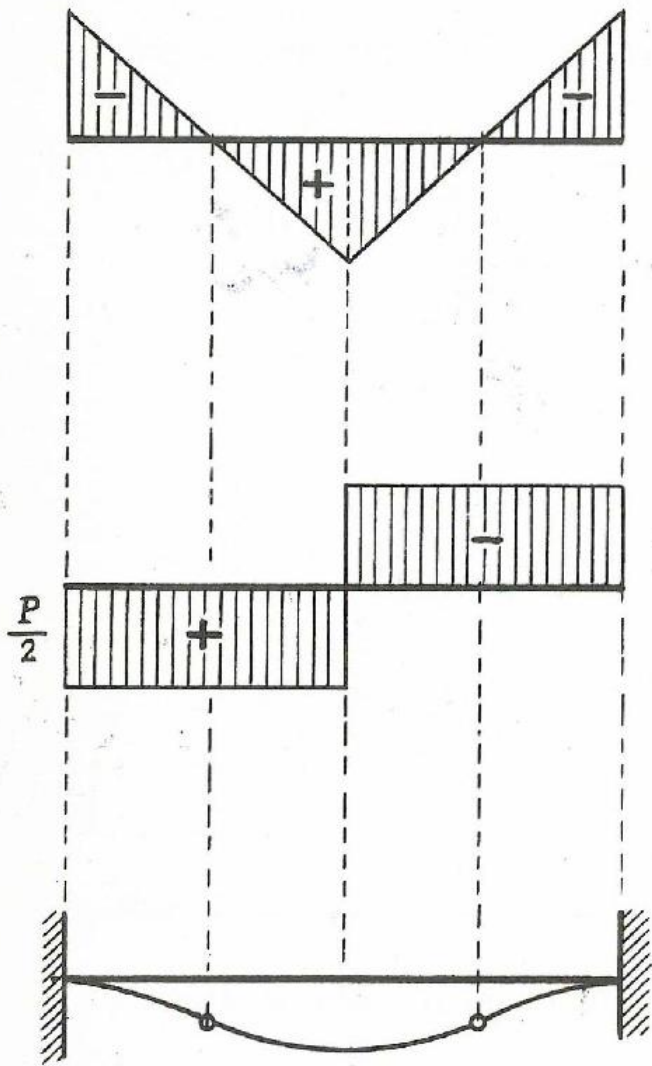
Reacciones.

$$X_A = X_B = 0$$

$$Y_A = Y_B \rightarrow \frac{Pl}{2} + = Y \cdot l \rightarrow Y_A = Y_B = \frac{P}{2}$$

Momento en el centro.

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl}{8} = \frac{Pl}{8}$$

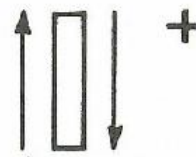


Ley de M_f



Ley de Q .

$\frac{P}{2}$



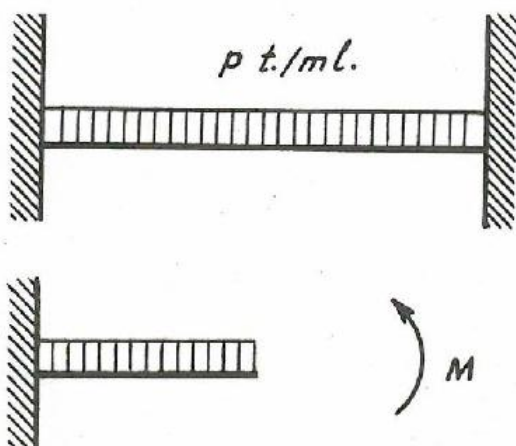
Elástica.

Empotramiento y punto medio con tangente horizontal.

Dos puntos de inflexión para $M_f=0$.

-o-

11. Determinar: Reacciones, leyes de M_f y Q , dibujo de la elástica a estima indicando los puntos notables.



Como ya conocemos el modo de emplear el teorema de Castigliano o los teoremas de Mohr, vamos a usar otro procedimiento. -

Cortemos la viga por la mitad. ¿Qué esfuerzos transmitía la mitad eliminada?

axiales → ninguno.

cortantes → ninguno.

Momento → SI → Este tendrá un va

lor real que obligue a que dicha sección no gire, condición que viene impuesta por la simetría de deformación.

Angulo que gira la reacción extremo si no actúa \underline{M} .

$$\vartheta = \int_{ed}^{ef} M_f d\phi = \int_{-l/2}^0 -\frac{Px^2}{2} \frac{dx}{EI} = -\frac{Px^3}{6EI} \Big|_{-l/2}^0 = \frac{Pl^2}{48EI} \quad (1)$$

Dicha sección por la sola actuación de \underline{M} giraría,

$$\vartheta = \frac{Ml}{2EI} \quad (2)$$

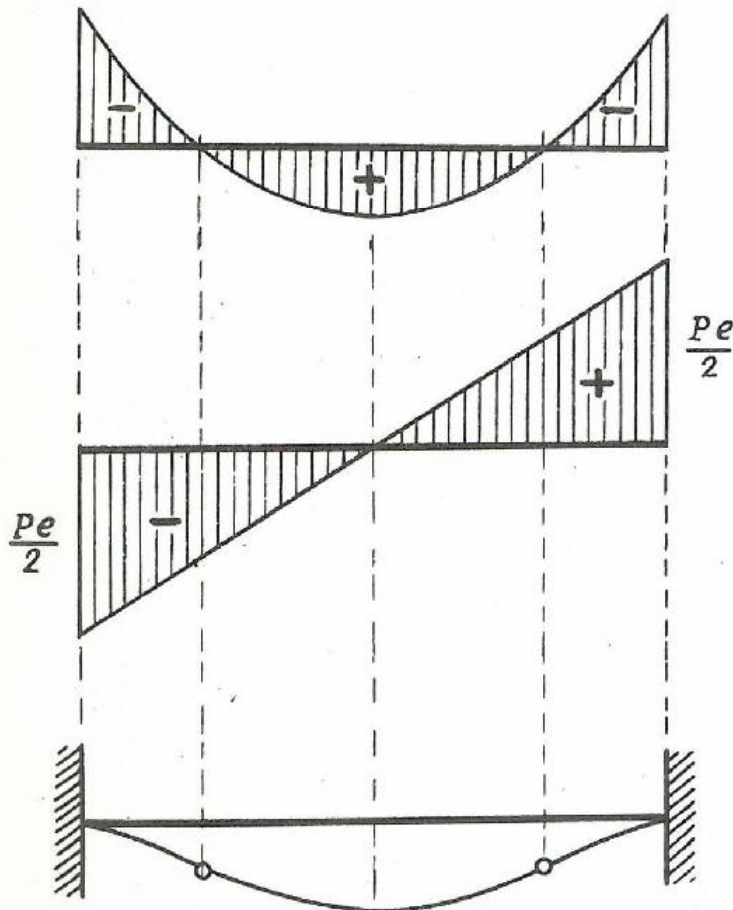
Iguando (1) y (2)

$$\frac{Ml}{2EI} = \frac{Pl^3}{48EI} \rightarrow M = \frac{Pl^2}{24}$$

Momentos en los empotramientos.

$$M_A = M_B = \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{Pl^2}{24} = \frac{Pl^2}{12}$$

Reacciones $Y_A = Y_B = \frac{Pl}{2}$ Por simetría.



Ley de $M\phi$



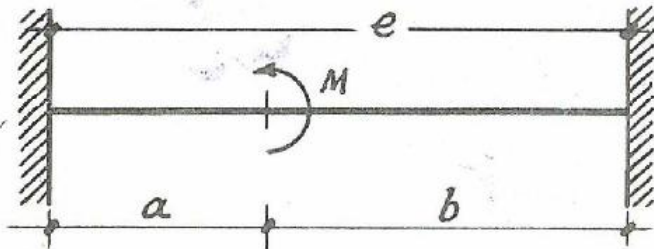
Ley de Q



Elástica.

En los empotramientos y en el punto medio tangentes horizontales. Dos puntos de inflexión correspondiendo $M_f = 0$.

12. Determinar los momentos de empotramiento de la estructura adjunta.



Giros en la viga isostática,

$$\theta'_1 = -\frac{M}{6EI} (l^2 - 3b^2)$$

$$\theta'_2 = -\frac{M}{6EI} (l^2 - 3a^2)$$

Giros debidos a M_1 y M_2 ,

$$\theta''_1 = \frac{M_1 l}{3EI} - \frac{M_2 l}{6EI}$$

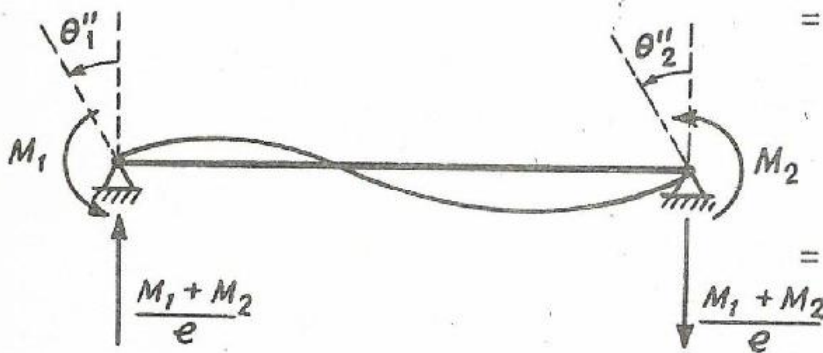
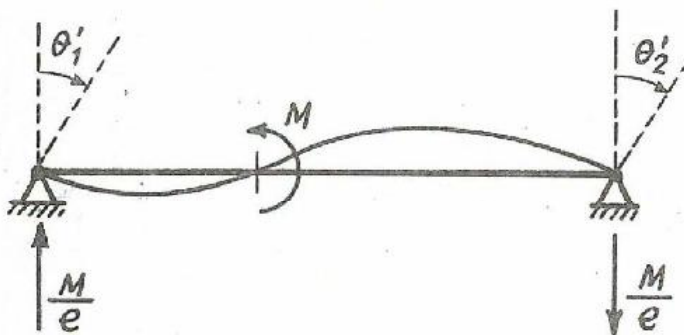
$$\theta''_2 = \frac{M_2 l}{3EI} - \frac{M_1 l}{6EI}$$

Giros totales,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta'_1 + \theta''_1 = \\ &= \frac{M_1 l}{3EI} - \frac{M_2 l}{6EI} - \frac{M}{6EI} (l^2 - 3b^2) \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \theta'_2 + \theta''_2 =$$

$$= \frac{M_2 l}{3EI} - \frac{M_1 l}{6EI} - \frac{M}{6EI} (l^2 - 3a^2)$$



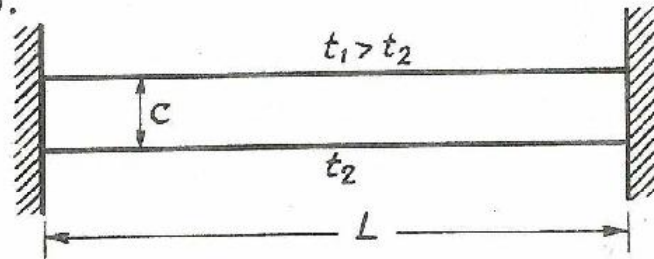
Haciendo $\theta_1 = \theta_2 = 0$ se sacan M_1 y M_2 .

$$M_1 = \frac{M}{l^2} [l^2 - a^2 - 2b^2]$$

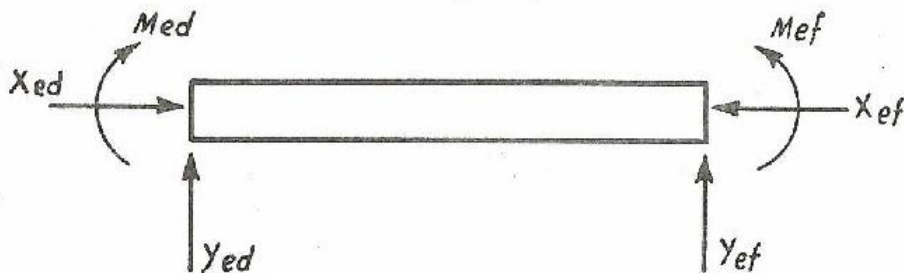
$$M_2 = \frac{M}{l^2} [l^2 - b^2 - 2a^2]$$

13. Determinar las reacciones en los empotramientos de la viga de la figura de sección rectangular Ω y canto c sometida en su parte inferior a una temperatura t_2 y en la superior a $t_1 > t_2$. Siendo k el coeficiente de dilatación del material, la tempera -

tura inicial o, y suponiendo el c. de g. de la sección en el punto medio del canto.



Al someter la viga a dicha ley lineal de temperatura aparecen unos esfuerzos en los extremos que por la simetría del problema serán:



Por simetría $y_{ed} = y_{ef}$, por otra parte, como la pieza ha de estar en equilibrio, la proyección de fuerzas verticales ha de ser nula, es decir, $y_{ef} = -y_{ed}$ como ambas expresiones se han de verificar han de ser $y_{ed} = y_{ef} = 0$.

En una rebanada se verifica:

$$\Delta(ds) = k \frac{t_1 + t_2}{2} ds$$

$$d\theta = k \frac{t_1 - t_2}{c} ds$$

Si quitamos el empotramiento de la derecha, los movimientos del extremo frontal debidos a la temperatura, los determinaremos considerando todas las deformaciones elementales intermedias.

$$u = \int_0^L k \frac{t_1 + t_2}{2} dx = k \frac{t_1 + t_2}{2} L$$

$$v = \int_0^L k \frac{t_1 - t_2}{c} (L-x) dx = k \frac{t_1 - t_2}{c} \frac{L^2}{2}$$

$$\omega = \int_0^L k \frac{t_1 - t_2}{c} dx = k \frac{t_1 - t_2}{c} L$$

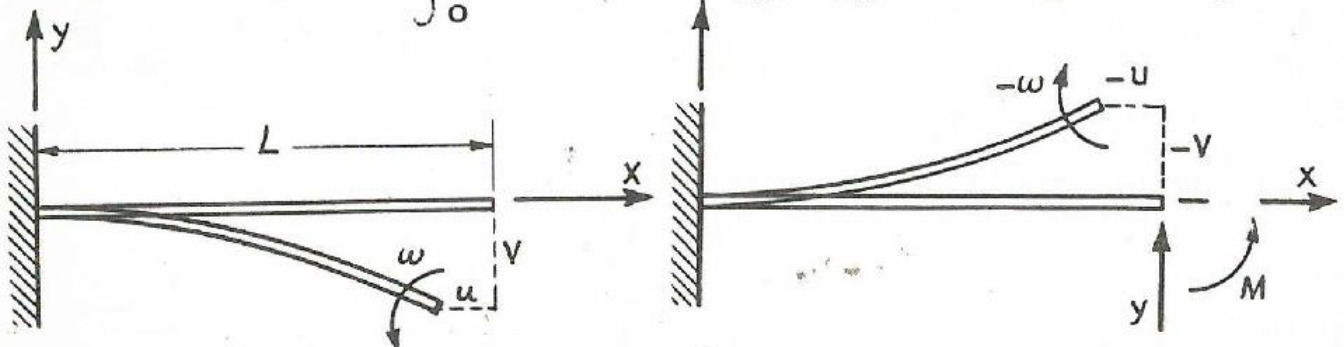
Las reacciones XYM nos tienen que producir unos movimientos iguales y contrarios. Se tiene, pues, que verificar:

$$u_x = -u = \int_0^L X \frac{dx}{E\Omega} = \frac{XL}{E\Omega} = -k \frac{t_1 + t_2}{2} L$$

$$v_x = -v = \int_0^L [M + Y(L-x)] \frac{dx}{EI} (L-x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{ML^2}{2} + \frac{YL^3}{3} \right] =$$

$$= -k \frac{t_1 - t_2}{c} \frac{L^2}{2}$$

$$\omega_x = -\omega = \int_0^L [M + Y(L-x)] \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left(ML + \frac{YL^2}{2} \right) = -k \frac{t_1 - t_2}{c} L$$



Obtenemos de ellas:

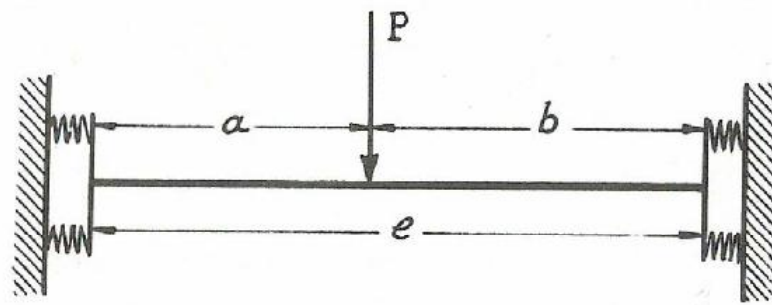
$$X = -k \frac{t_1 + t_2}{2} E \Omega$$

$$Y = 0 \text{ (como ya obtuvimos anteriormente)}$$

$$M = -k \frac{t_1 - t_2}{c} EI$$

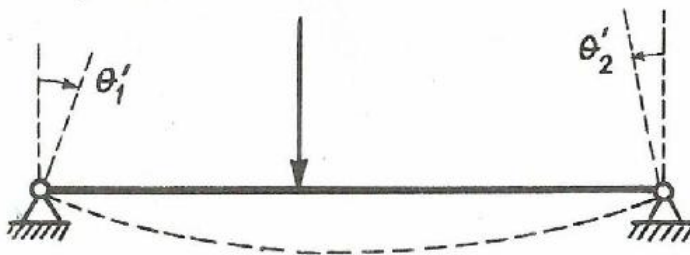
-o-

14. Calcular los momentos de empotramiento de la viga indicada en la figura en la que los empotramientos son elásticos respecto al giro (los momentos de empotramientos son proporcionales a los giros de los extremos).



Consideremos como sentido positivo de giro y momentos el contrario a las agujas de un reloj; tenemos entonces:

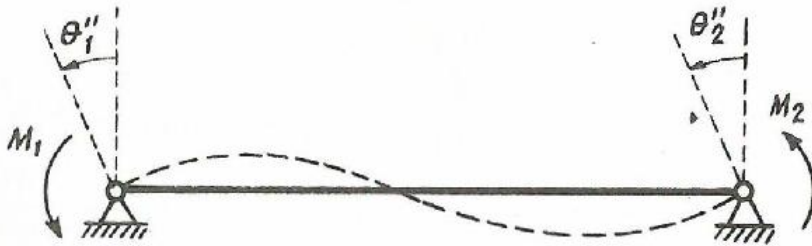
Giros en la viga isostática:



$$\theta'_1 = - \frac{P a b}{6 EI l} (l+b)$$

$$\theta'_2 = \frac{P a b}{6 EI l} (l+a)$$

Giros debidos a los momentos de empotramiento.



$$\theta''_1 = \frac{M_1 l}{3 EI} - \frac{M_2 l}{6 EI}$$

$$\theta''_2 = \frac{M_2 l}{3 EI} - \frac{M_1 l}{6 EI}$$

Por la acción de ambas sollicitaciones tendremos una deformación final en la que los giros de los apoyos serán:

$$\theta_1 = \theta'_1 + \theta''_1 = \frac{M_1 l}{3 EI} - \frac{M_2 l}{6 EI} - \frac{Pab}{6 EI l} (l+b)$$

$$\theta_2 = \theta'_2 + \theta''_2 = \frac{M_2 l}{3 EI} - \frac{M_1 l}{6 EI} + \frac{Pab}{6 EI l} (l+a)$$

Como los apoyos son elásticos, con el criterio de signos adoptado, tendremos:

$$M_1 = - k \cdot \theta_1 \quad M_2 = - k \theta_2$$

Por tanto,

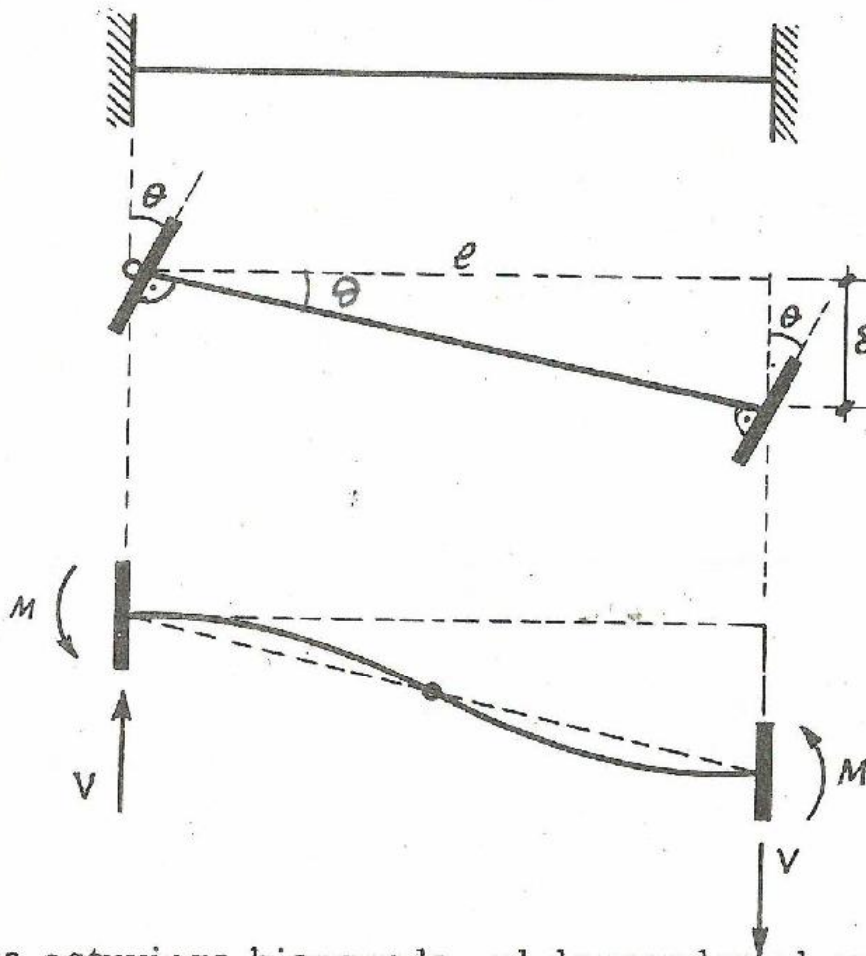
$$-\frac{M_1}{k} = \frac{M_1 l}{3EI} - \frac{M_2 l}{6EI} - \frac{Pab}{6EI l} (l+b)$$

$$-\frac{M_2}{k} = \frac{M_2 l}{3EI} - \frac{M_1 l}{6EI} + \frac{Pab}{6EI l} (l+a)$$

Sistema de ecuaciones que nos permitirá determinar M_1 y M_2 .

-o-

15. Determinar la ley de M_f y Q en una viga biempotrada, al originarse un descenso δ en el empotramiento derecho.



Si la viga estuviera biapoyada, al descender el apoyo no pasaría nada. Por estar biempotrada las tangentes en los empotramientos tienen que ser horizontales, luego hemos de introducir unos momentos \underline{M} del mismo valor (ambos apoyos han de girar el mismo ángulo).

Naturalmente para restablecer el equilibrio de fuerzas aparecerán unas reacciones verticales.

$$V = \frac{2M}{l}$$

Las reacciones horizontales son nulas por no haber desplazamientos a lo largo de la directriz.

En la estructura sometida a estos esfuerzos, tendremos:

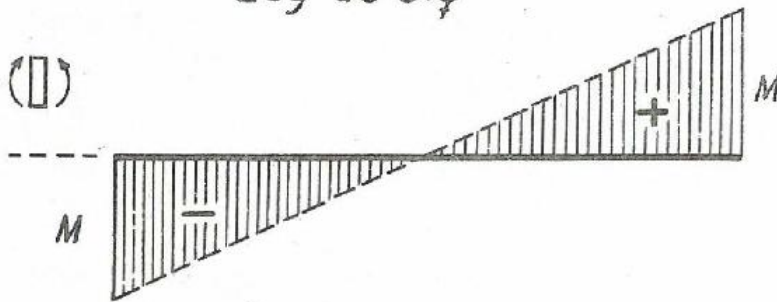
Giro en los apoyos:

$$\vartheta = \frac{l}{4} \cdot \frac{M}{EI l} \left(l - \frac{l}{6} - \frac{l}{6} \right) = \frac{M l}{6 EI}$$

Este giro será igual al producido en los apoyos de la viga isostática correspondiente, por efecto del descenso δ del apoyo.

$$\vartheta = \frac{\delta}{l}$$

Ley de $M\varphi$



Igualando, obtenemos:

$$M = \frac{6 \cdot EI \delta}{L^2}, \text{ por tanto,}$$

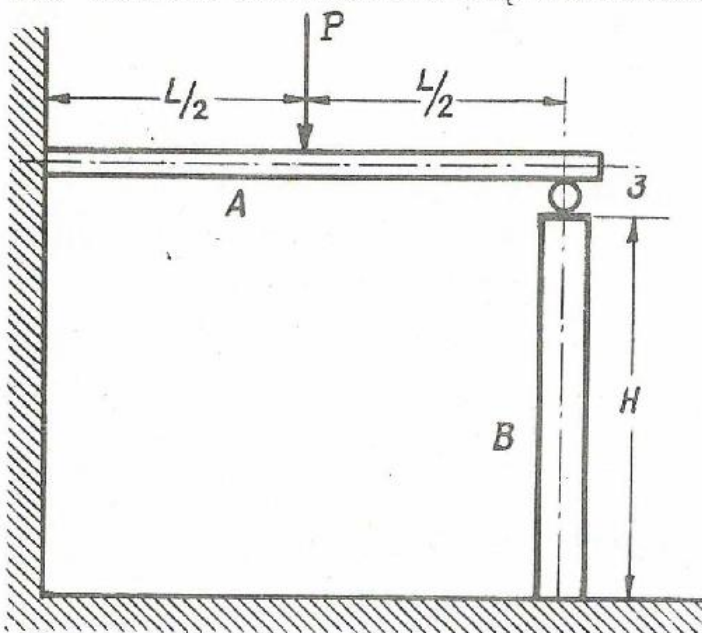
$$v = \frac{12 EI \delta}{L^3}$$

La ley de Q será entonces:



-o-

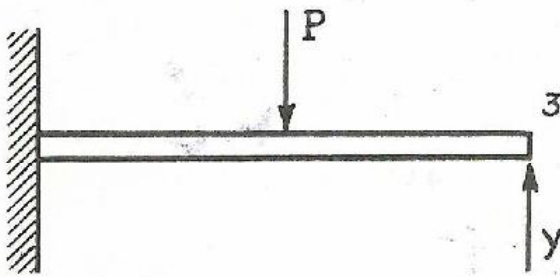
16. Sea la estructura hiperestática indicada en la figura adjunta formada por una viga A de luz L y momento de inercia I , empotrada en un extremo y apoyada por el otro en un soporte B de altura H y sección Ω y sometida a una carga P en el centro de la luz de la viga.



Calcular la reacción y el descenso en el punto 3.

La pieza A estará sometida a

a las siguientes fuerzas:



siendo Y la reacción del rodillo que buscamos.

Entonces, el punto 3, como perteneciente a la pieza A habrá sufrido un corrimiento que valdrá - (Torroja, monografía 100, página 30).

$$v_3 = P \left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{3L - \frac{L}{2}}{6 E_A I_A} - y \frac{L^3}{3 E_A I_A} = P \frac{5 L^3}{48 E_A I_A} - y \frac{L^3}{3 E_A I_A} \quad (1)$$

Por otra parte, el soporte B estará sometido a una compresión axial de valor Y , sufriendo un acortamiento, dado por la ley de Hooke.

$$\frac{Y}{\Omega_B} = E_B \frac{v_3}{H} \text{ es decir, } v_3 = \frac{YH}{\Omega_B E_B} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), obtenemos:

$$Y = \frac{P \cdot \frac{5L^3}{48 E_A I_A}}{\frac{L^3}{3 E_A I_A} + \frac{H}{E_B \Omega_B}}$$

y conocida la reacción Y el descenso del punto 3, lo obtendríamos de la expresión (2).

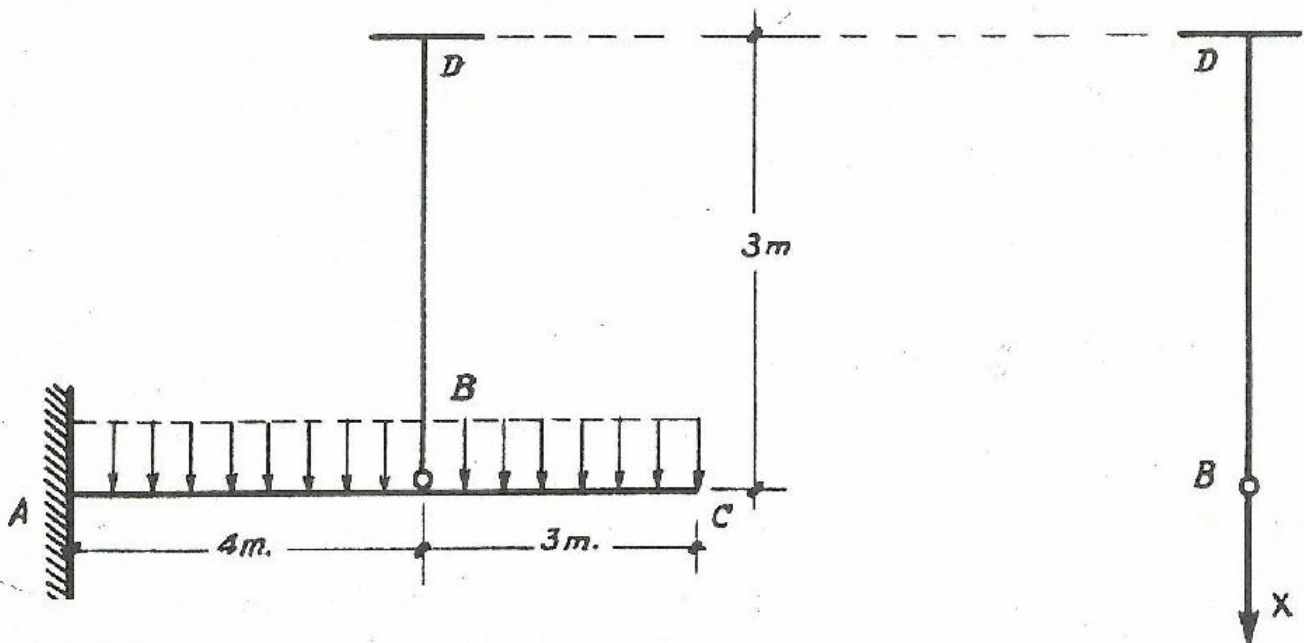
-o-

17. Una ménsula sometida a una sobrecarga uniforme de 3 T/m descansa mediante una rótura en un tirante cuya sección es de 9 cm^2 y su módulo de elasticidad es $2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ y de longitud 3 m. Se pide:

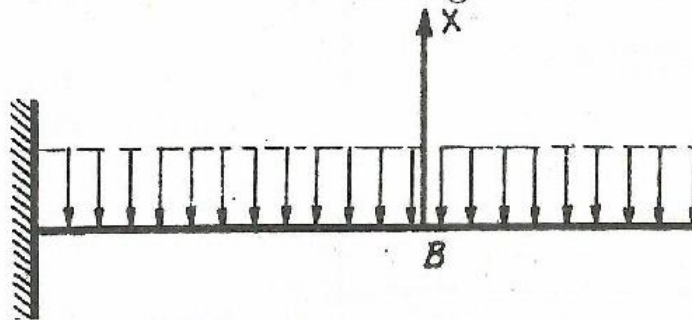
- Valor en toneladas del esfuerzo axial del tirante.
- Corrimiento del extremo derecho.

Momento de inercia de la vigueta $I = 0,0128 \text{ m}^4$.

Módulo de elasticidad de la vigueta $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}^2$.



El tirante DB estará sometido a una tracción x , debido a la acción de la ménsula sobre él; análogamente en la ménsula, tendremos:



Determinaremos x obligando a que las dos estructuras tengan el mismo corrimiento en el punto B.

Para la ménsula:

$$U_B = \frac{2}{2 E_v I_v} \left(\frac{7^2 \cdot 4^2}{2} - \frac{7 \cdot 4^3}{3} + \frac{4^4}{12} \right) - \frac{x \cdot 4^3}{3 E_v I_v}$$

Para el tirante:

$$U_B = \frac{x \cdot 3}{\Omega_T E_T}$$

Igualando, tenemos:

$$\frac{3x}{\Omega_T E_T} = \frac{1}{E_v I_v} \left[\frac{7^2 \cdot 4^2}{2} - \frac{7 \cdot 4^3}{3} + \frac{4^4}{12} \right] - \frac{x \cdot 4^3}{3 E_v I_v}$$

De aquí, obtenemos:

$$x = 15,4 \text{ T.}$$

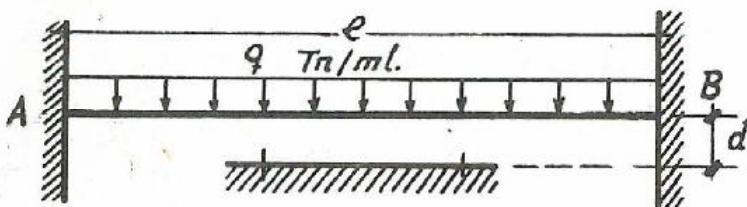
Conocido el valor de x , determinamos en la ménsula el corrimiento del extremo c , mediante la utilización de la tabla T. 32.1 de la monografía nº 100.

$$U_c = \frac{2 \cdot 7^4}{8 E I_v} - 15,4 \cdot 4^2 \cdot \frac{21-4}{6 E I_v}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$U_c = 5,4 \text{ mm.}$$

18. Estudiar la deformación de la viga adjunta.

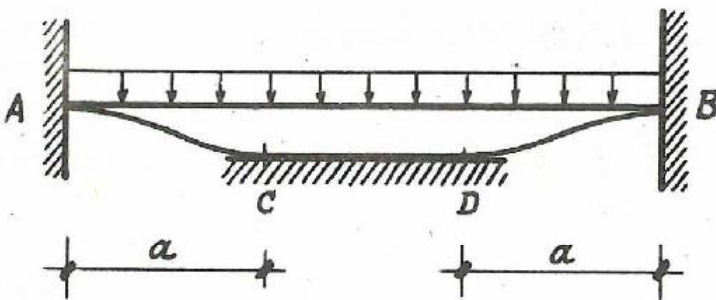


Si no existe apoyo inferior, la flecha en el centro vale:

$$\frac{1}{384} \frac{q l^4}{EI}$$

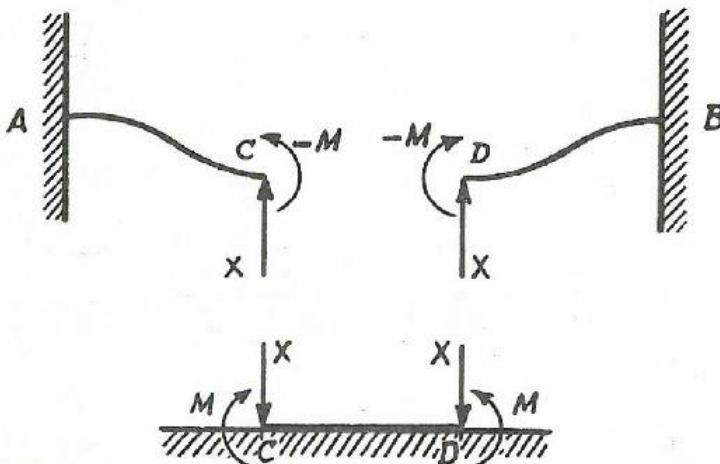
Habrá un valor de q para el cual la flecha sea d .

$$q_1 = 384 d \frac{EI}{l^4}$$



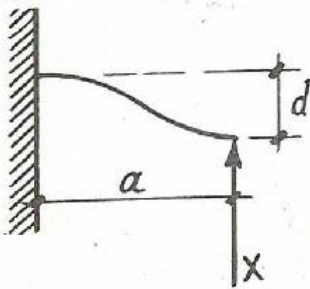
Para $q < q_1$ tenemos una viga biempotrada sin más complicación.

Para $q > q_1$ hay un tramo \overline{CD} que apoya y queda horizontal.



En este caso no existe curvatura en el tramo CD y por tanto, el momento flector, será nulo.

Si cortamos la estructura por uno de los puntos de apoyo C   D , al ser nulo el momento flector y el esfuerzo axial (por no haber deformaciones longitudinales); puede



mos reducir nuestro estudio a una ménsula de longitud a con una carga uniformemente repartida q y un cortante x en el extremo y obligar a que la flecha en el extremo sea d , y el giro sea nulo.

$$\text{Flecha en el extremo} = \frac{q a^4}{8 EI} - \frac{X a^3}{3 EI} = d$$

$$\text{Giro en el extremo} = \frac{q a^3}{6 EI} - \frac{X a^2}{2 EI} = 0$$

De ambas ecuaciones, sale:

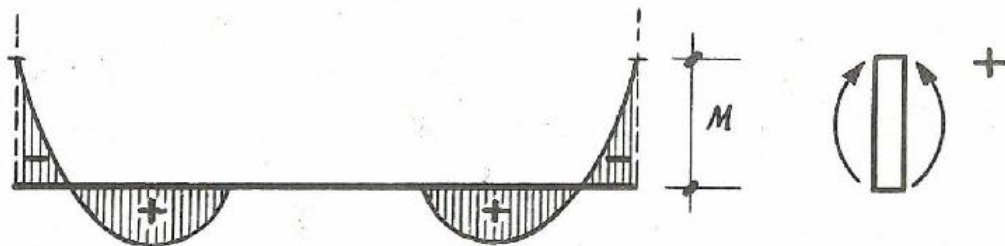
$$X = \frac{q}{3} a \quad ; \quad a = \sqrt[4]{\frac{72 d EI}{q}}$$

$$X = \sqrt[4]{\frac{8}{9} d EI q^3}$$

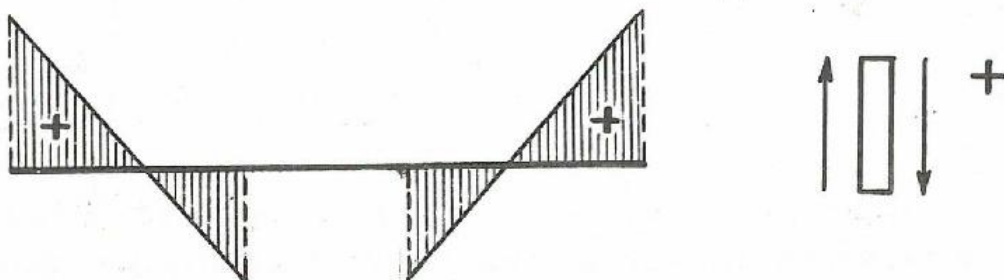
En estas condiciones, en el empotramiento

$$|M| = \frac{q a^2}{2} - X a = \frac{q a^2}{6} = \sqrt{2 d q EI}$$

Ley de M



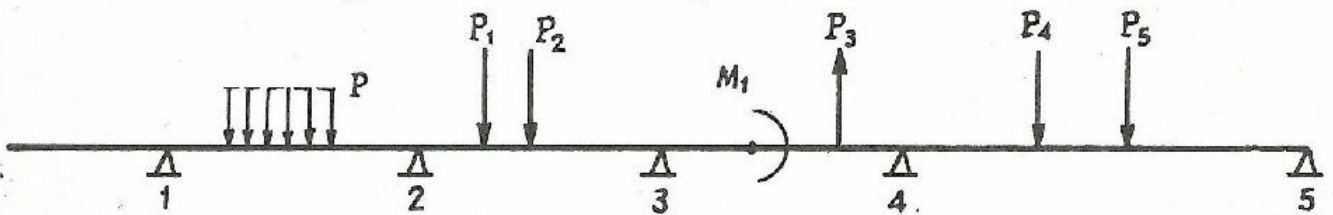
Ley de Q



VIGAS CONTINUAS

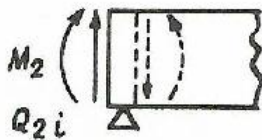
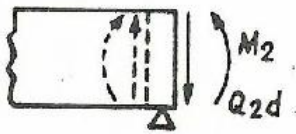
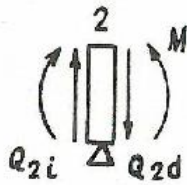
-0-

5-1. Consideremos el caso de una viga de sección constante (el estudio para vigas de sección variable se realizaría de igual forma, siempre y cuando calculáremos correctamente las deformaciones) apoyadas en varios puntos y sometida a una serie de cargas exteriores fijas.



En las rebanadas situadas encima de los apoyos 1, 2, 3, 4 y 5 existirán unos momentos flectores M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (en el apoyo 5 no habrá M_5 por terminar en él la viga), y unos cortantes

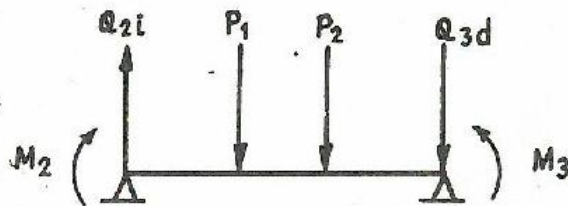
$$[Q_{1d}, Q_{1i}], [Q_{2d}, Q_{2i}] \dots$$



con valores distintos a derecha e izquierda de la rebanada por la existencia de la reacción actuando directamente sobre ella. Estos esfuerzos nos darán según el esquema adjunto, la acción de una parte de la viga sobre el resto de ella.

Los esfuerzos axiales serán nulos siempre que no existan fuerzas horizontales.

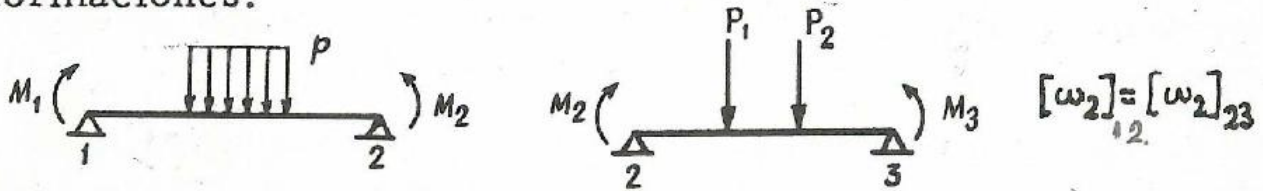
Si aislamos entonces un tramo de viga estará sometida a las siguientes sollicitaciones:



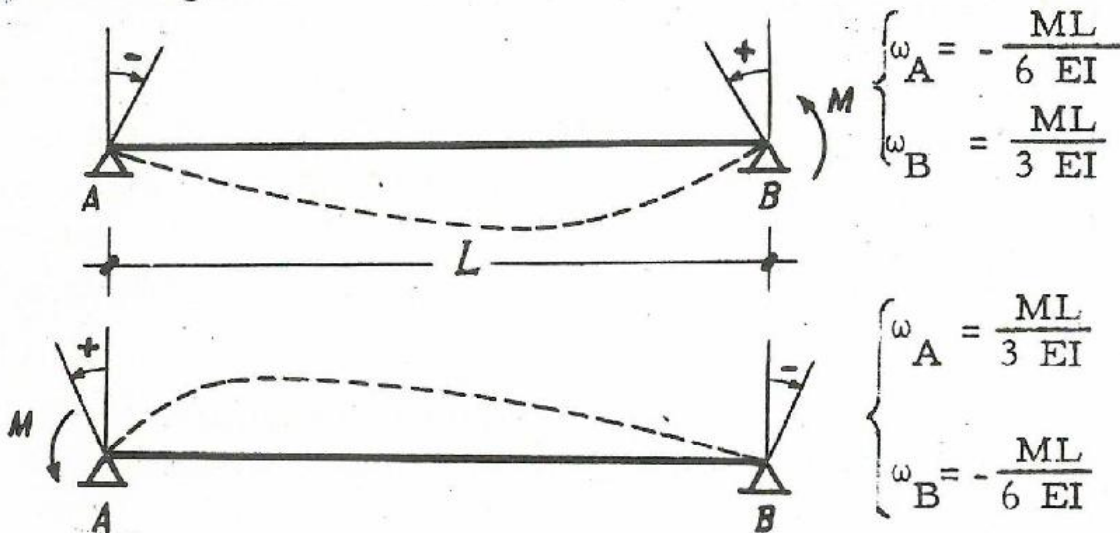
Debido a ellas se deformará elásticamente apareciendo unos giros en los apoyos: ω_2 y ω_3 que deben coincidir con los calculados para los mismos apoyos en los tramos contiguos para que se

conservar la continuidad de la estructura.

Ahora bien, como Q_{2i} y Q_{3d} actúan directamente sobre los apoyos se absorben por estos sin producir deformación, con lo cual tendremos el siguiente esquema de cálculo a efectos de deformaciones.



El giro que toma cada tramo en uno de sus extremos, lo calcularemos como suma de dos; uno debido a las cargas exteriores (y reacciones correspondientes) que llamaremos $\hat{\omega}_2$ y otro debido a los momentos (y sus reacciones) que se calcula en la forma siguiente:



Con todo esto podemos poner para los tramos 12 y 23:

$$\omega_2 \Big|_1^2 = \hat{\omega}_2 \Big|_1^2 + \frac{M_1 L_{12}}{6 EI} + \frac{M_2 L_{12}}{3 EI}$$

$$\omega_2 \Big|_2^3 = \hat{\omega}_2 \Big|_2^3 - \frac{M_2 L_{23}}{3 EI} - \frac{M_3 L_{23}}{6 EI}$$

Como han de ser iguales:

$$\omega_2 \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right. + \frac{M_1 L_{12}}{6 EI} + \frac{M_2 L_{12}}{6 EI} = \omega_2 \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right. - \frac{M_2 L_{23}}{3 EI} - \frac{M_3 L_{23}}{6 EI}$$

Esta es la llamada "ecuación de los tres momentos".

Hacemos análogamente para los tramos 23 y 34 que inciden en el nudo 3, e igualmente para los demás nudos.

En definitiva tendremos tantas ecuaciones como nudos intermedios haya y por tanto tantas incógnitas como ecuaciones, luego tenemos resuelto el problema que es el conocer esos momentos que actúan en los nudos al considerar los tramos por separado.

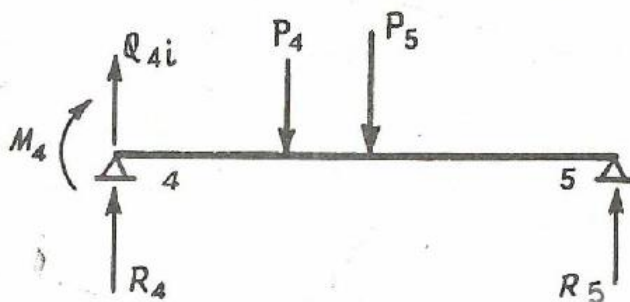
Si un extremo está empotrado, supongamos que lo fuera el extremo 5, se verifica que:

luego,

$$\omega_5 \left| \begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right. = \omega_5 \left| \begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right. + \frac{M_4 L_{45}}{6 EI} + \frac{M_5 L_{45}}{3 EI} = 0$$

ecuación que nos permite conocer el momento de empotramiento M_5 .

Una vez conocidos los momentos, podemos determinar las reacciones con lo cual tendremos completamente resuelto el problema. El cálculo de las reacciones podemos realizarle por dos métodos:

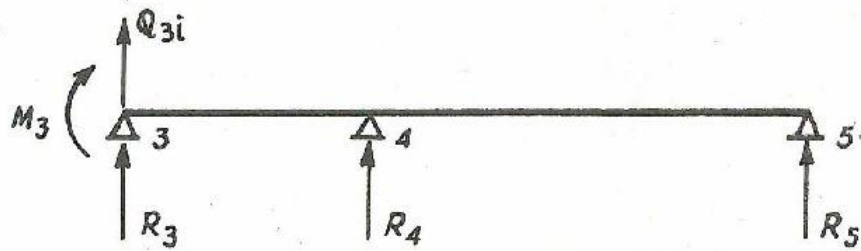


1. Consideramos un tramo extremo.

Si tomamos momentos con respecto al punto 4 obtenemos una ecuación cuya única incógnita es R_5 que por tanto podremos calcular.

- Consideramos el tramo anteriormente calculado y el contiguo

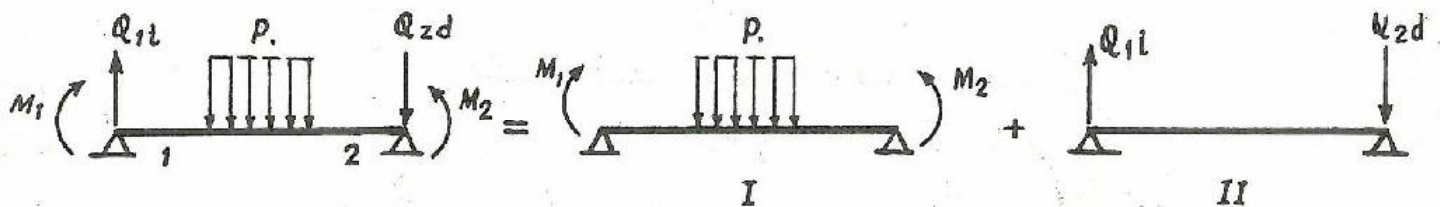
a él.



Tomamos momentos con respecto a 3, tenemos una ecuación en R_4 y R_5 , que por ser esta última conocida nos permite determinar R_4 .

Repitiendo el proceso añadiendo cada vez un tramo más, podemos determinar todas las reacciones.

2. Consideremos un tramo cualquiera.

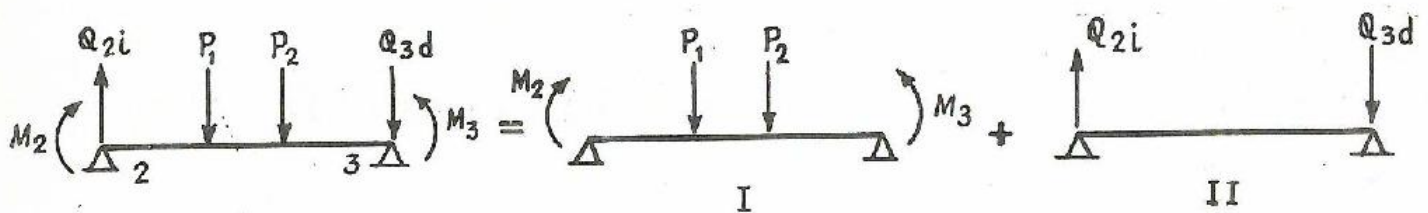


Según el principio de superposición, la reacción en un apoyo será suma de las de los dos estados parciales.

$$R_2 = [R_2]_{12} + Q_{2d}$$

siendo $[R_2]_{12}$ la reacción producida en el apoyo 2 por la sollicitación I.

Consideramos el tramo contiguo



Análogamente determinamos.

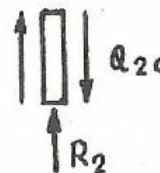
$$R_2 = [R_2]_{23} - Q_{2i}$$

Sumando esta expresión y la anterior, tenemos:

$$2 R_2 = [R_2]_{12} + [R_2]_{23} + Q_{2d} - Q_{2i}$$

Del equilibrio de la rebanada situada encima del apoyo 2 te-

tenemos:

$$R_2 = Q_{2d} - Q_{2i}$$


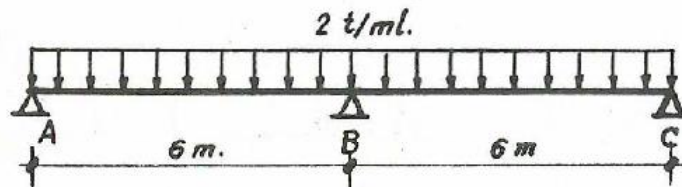
Obtenemos finalmente:

$$R_2 = [R_2]_{12} + [R_2]_{23}$$

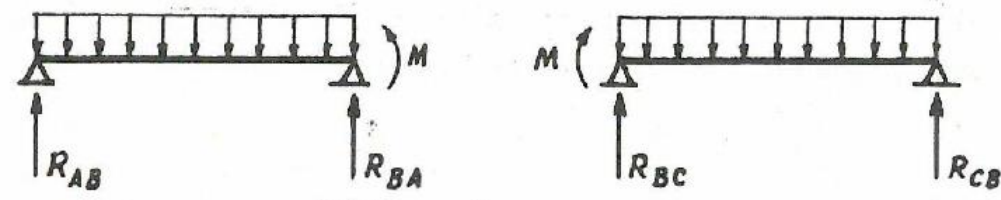
Es decir, la reacción total en el apoyo 2 es la suma de las producidas en dicho apoyo en los dos estados I.

-o-

19. Calcular las reacciones y ley de momentos flectores de la viga continua indicada en la figura.

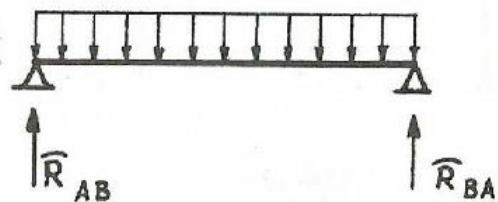


Separamos los tramos:



$$\left. \begin{aligned} \omega_B \Big|_A^B &= \hat{\omega}_B \Big|_A^B + \frac{M \cdot L_{AB}}{3 EI} \\ \omega_B \Big|_B^C &= \hat{\omega}_B \Big|_B^C - \frac{M \cdot L_{BC}}{3 EI} \end{aligned} \right\} M = \frac{3 EI}{L_{AB} + L_{BC}} (\hat{\omega}_B \Big|_B^C - \hat{\omega}_B \Big|_A^B)$$

En la viga



$$\text{Tenemos: } \hat{R}_{AB} = \hat{R}_{BA} = \frac{P L_{AB}}{2} = 6 \text{ Ton.}$$

Aplicando Mohr:

$$\hat{\omega}_B \Big|_A^B = \frac{1}{EI L_{AB}} \int_A^B M_f \cdot x \cdot dx = \frac{1}{EI \cdot L_{AB}} \int_0^{L_{AB}} \left[(L-x) \frac{PL}{2} - \frac{P(L-x)^2}{2} \right] x \cdot dx$$

luego

$$\hat{\omega}_B \begin{matrix} B \\ | \\ A \end{matrix} = \frac{PL_{AB}^3}{24 EI}$$

Análogamente obtendríamos:

$$\hat{\omega}_B \begin{matrix} C \\ | \\ B \end{matrix} = - \frac{PL_{AC}^3}{24 EI}$$

Entonces

$$M = \frac{3 EI}{L_{AB} + L_{BC}} \left[- \frac{PL_{BC}^3}{24 EI} - \frac{PL_{AB}^3}{24 EI} \right] = - \frac{P(L_{AB}^3 + L_{BC}^3)}{8(L_{AB} + L_{BC})}$$

$$M = - \frac{+2 \cdot 2 \cdot 6^3}{8 \cdot 2 \cdot 6} = - 9 \text{ mT.}$$

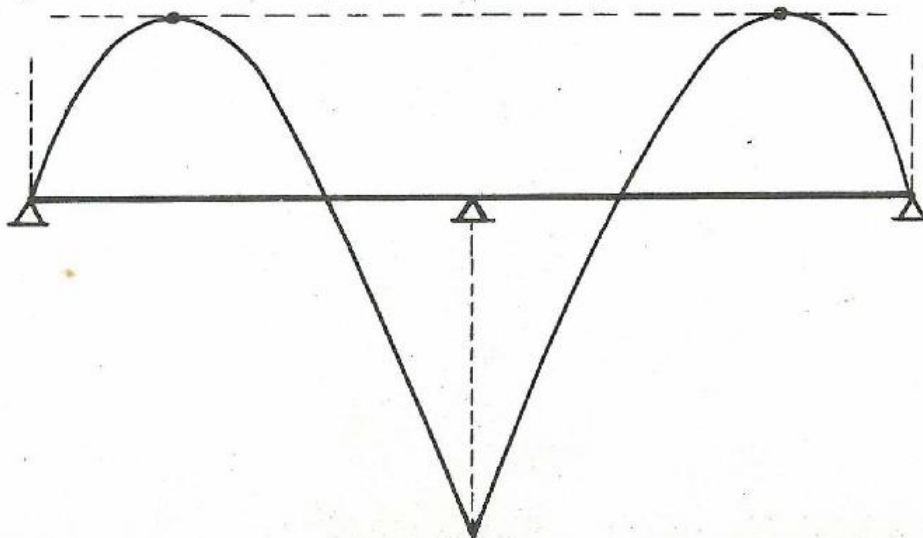
$$\left. \begin{aligned} R_{BA} &= \hat{R}_{BA} + \frac{-M}{L_{AB}} = 6 + \frac{9}{6} = \frac{45}{6} \\ R_{BC} &= \hat{R}_{BC} - \frac{M}{L_{AB}} = 6 + \frac{9}{6} = \frac{45}{6} \end{aligned} \right\} R_B = \frac{45}{3} = 15 \text{ Ton.}$$

Tenemos:

$$R_A = R_C = \frac{P(2L) - R_B}{2} = 4,5 \text{ Ton.}$$

(Ver ejemplo 3 del apartado dedicado a "utilización de los abacos).

Podemos dibujar entonces la ley de momentos flectores.



Para $0 \leq x \leq 6$

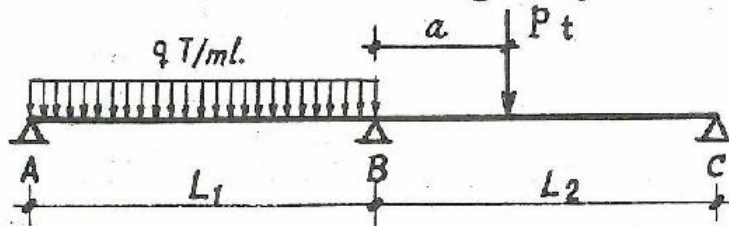
$$M_f = (4,5 - x)x$$

Para $6 \leq x \leq 12$

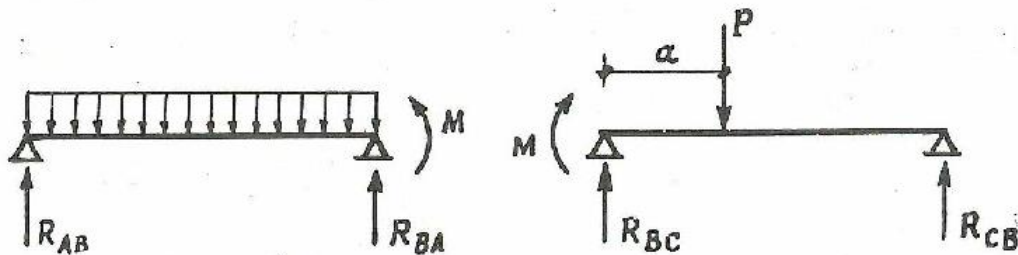
$$M_f = 4,5(12-x) - (12-x)^2$$

-o-

20. Calcular las reacciones de la viga adjunta:



Descomponemos la viga:



Reacciones isostáticas:

$$\widehat{R}_{AB} = \widehat{R}_{BA} = \frac{q L_1}{2}$$

$$\widehat{R}_{CB} = \frac{a}{L_2} = P$$

$$\widehat{R}_{BC} = \frac{(L_2 - a)}{L_2} P$$

Giros isostáticos:

$$\omega_B \Big|_A^B = \frac{q L_2^3}{24 EI}$$

$$\omega_B \Big|_B^C = - \frac{q (L_2 - a)(2 a L_2 - a^2)}{6 EI L_2}$$

Entonces:

$$\omega_B \Big|_A^B = \omega_B \Big|_B^C$$

$$\omega_B \begin{vmatrix} B \\ A \end{vmatrix} + \frac{M L_1}{3 EI} = \hat{\omega}_B \begin{vmatrix} C \\ B \end{vmatrix} - \frac{M L_2}{3 EI} \text{ de donde despejamos } \underline{M}.$$

Conocido M y las reacciones isostáticas, las reacciones hiperestáticas serán:

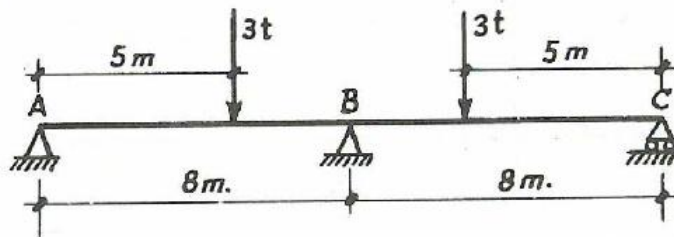
$$\left. \begin{aligned} R_{BA} &= \hat{R}_{BA} + \frac{-M}{L_1} \\ R_{BC} &= \hat{R}_{BC} - \frac{M}{L_1} \end{aligned} \right\} R_B = R_{BA} + R_{BC}$$

$$R_A = R_{AB} = \hat{R}_{AB} - \frac{-M}{L_1}$$

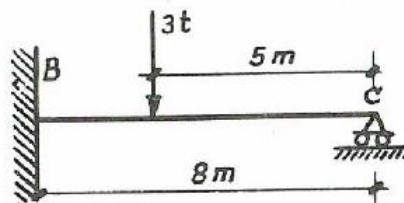
$$R_C = R_{CB} = \hat{R}_{CB} + \frac{M}{L_2}$$

-o-

21. Calcular las reacciones en la viga de la figura.



Debido a la simetría de la pieza y a la simetría de cargas, podemos sustituir la viga continua de dos tramos por la viga:



ya que por las simetrías antes mencionadas la viga en el apoyo B no gira. La deformada tendría la forma:



La viga apoyada y empotrada la tenemos en la tabla T38-1 - (monografía 100 del ITCC).

Tenemos:

$$y_C = P \frac{(\ell - a)^2}{2\ell^2} \left(3 - \frac{\ell - a}{\ell} \right) = 3 \cdot \frac{3^2}{2,8^2} \left(3 - \frac{3}{8} \right) = 0,553 \text{ t.}$$

$$y_B = 3 \left[1 - \frac{9}{2,64} \left(3 - \frac{3}{8} \right) \right] = 2,447 \text{ t.}$$

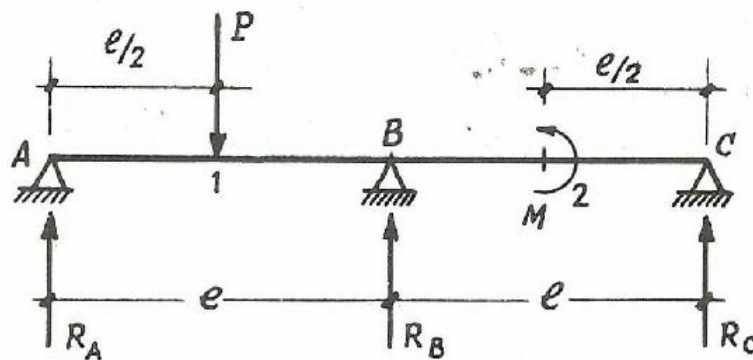
$$y_A = y_C$$

En la viga continúa, será:

$$\begin{cases} y_A = 0,553 \text{ t.} \\ y_C = y_A \\ y_B = 2 \cdot 2,447 = 4,894 \text{ t.} \end{cases}$$

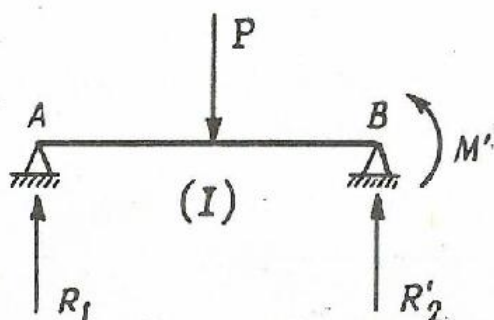
-o-

22. Calcular las reacciones en la viga adjunta:



Cortamos la viga por el apoyo intermedio y la dividimos en dos vigas simplemente apoyadas.

I. Reacciones:

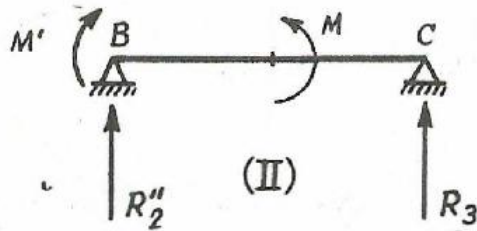


$$\left. \begin{aligned} -\frac{P\ell}{2} + M' + R'_2\ell &= 0 \\ \frac{P\ell}{2} + M' - R_1\ell &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$R_1 = \frac{1}{\ell} \left[M' + \frac{P\ell}{2} \right]$$

$$R'_2 = \frac{1}{l} \left[-M' + \frac{Pl}{2} \right]$$

II. Reacciones:



$$\left. \begin{aligned} -M' + M - R'_2 l &= 0 \\ -M' + M + R_3 l &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$R''_2 = \frac{1}{l} [-M' + M]$$

$$R_3 = -\frac{1}{l} [-M' + M]$$

Desconocemos el valor de M' .

Para calcularlo, igualamos el giro en el extremo B en ambas vigas simplemente apoyadas.

$$I) \quad \omega_B = \frac{Pl^2}{K_1 EI} + \frac{M'l}{3 EI} = \frac{Pl^2}{16 EI} + \frac{M'l}{3 EI}$$

$$II) \quad \omega_B = -\frac{Ml}{K_2 EI} - \frac{M'l}{3 EI}$$

Igualando los valores:

$$\frac{Pl^2}{16 EI} + \frac{M'l}{3 EI} = -\frac{Ml}{K_2 EI} - \frac{M'l}{3 EI}$$

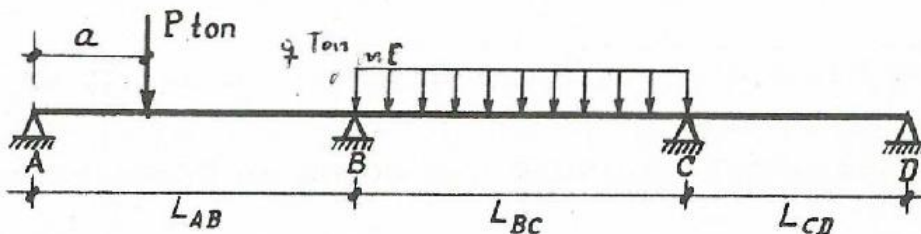
$$M' = \frac{-3}{2} \left[\frac{Pl}{1,6} + \frac{M}{K_2} \right]$$

Sustituyendo M' en los valores de R_1 , R'_2 , R''_2 y R_3 , tenemos las reacciones, no olvidando que:

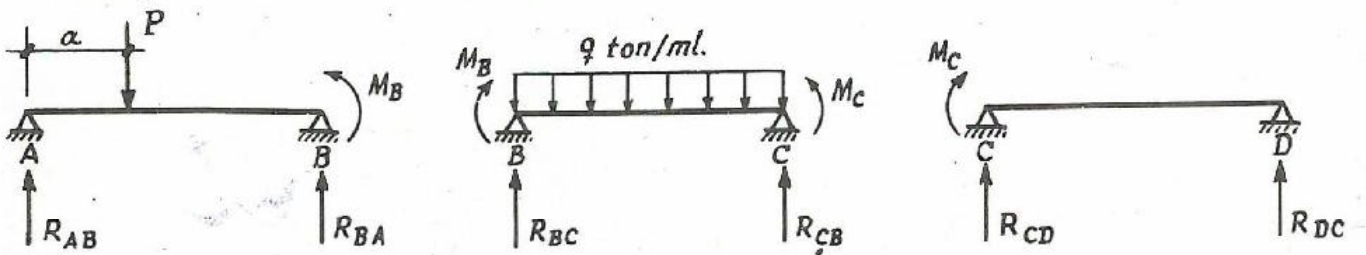
$$R_2 = R'_2 + R''_2$$

-o-

23. Calcular las reacciones de la viga adjunta:



Separamos los tramos:



Cálculo de reacciones y giros isostáticos (Ver tablas de Toroja, monografía 100).

$$\begin{aligned} \hat{R}_{AB} &= p\left(1 - \frac{a}{L_{AB}}\right) & \hat{R}_{BA} &= \frac{Pa}{L} \\ \hat{R}_{BC} &= \frac{q L_{BC}}{2} & \hat{R}_{CB} &= \frac{q L_{BC}}{2} \\ \hat{R}_{CD} &= \hat{R}_{DC} = 0 \end{aligned}$$

Para el cálculo de los giros bastará en las tablas T 35. L de rivar de las flechas:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_A &= - \frac{P}{6 L_{AB} EI} (L_{AB} - a)(2aL_{AB} - a^2) \\ \hat{\omega}_B \Big|_A &= \frac{P}{6 L_{AB} EI} (L_{AB} - a)^2 \\ \hat{\omega}_B \Big|_C &= - \frac{q L_{BC}^3}{24 EI} \\ \hat{\omega}_C \Big|_B &= \frac{q L_{BC}^3}{24 EI} \\ \hat{\omega}_C \Big|_D &= \hat{\omega}_D \Big|_C = 0 \end{aligned}$$

Todos estos valores los podemos calcular función de los datos del problema.

Podemos poner entonces que como se ha de verificar que:

$$\omega_B \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} = \omega_B \begin{matrix} B \\ C \end{matrix}$$

$$\omega_B \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} = \omega_B \begin{matrix} C \\ D \end{matrix}$$

$$\omega_B \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} + \frac{M_B L_{AB}}{3 EI} = \omega_B \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} - \frac{M_B L_{BC}}{3 EI} - \frac{M_C L_{BC}}{6 EI}$$

$$\omega_C \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} + \frac{M_C L_{BC}}{3 EI} + \frac{M_B L_{BC}}{6 EI} = \omega_C \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} - \frac{M_C L_{CD}}{3 EI}$$

Este sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas M_B y M_C .
Conocidas M_B y M_C , las reacciones serán:

$$R_A = R_{AB} = \hat{R}_{AB} - \frac{-M_B}{L_{AB}}$$

$$R_{BA} = \hat{R}_{BA} + \frac{-M_B}{L_{AB}} \left. \vphantom{R_{BA}} \right\} R_B = R_{BA} + R_{BC}$$

$$R_{BC} = \hat{R}_{BC} - \frac{M_B - M_C}{L_{BC}}$$

$$R_{CB} = \hat{R}_{CB} + \frac{M_B - M_C}{L_{BC}} \left. \vphantom{R_{CB}} \right\} R_C = R_{CB} + R_{CD}$$

$$R_{CD} = \hat{R}_{CD} - \frac{M_C}{L_{CD}}$$

$$R_D = \hat{R}_{DC} = \hat{R}_{DC} + \frac{M_C}{L_{CD}}$$

5-2. UTILIZACION DE LOS ABACOS. - En la publicación número 100 del ITCC, en los abacos 39-1, 2, 3 y 4 están dibujadas las líneas de influencia de momentos flectores en los centros de los tramos y en los apoyos comunes a dos tramos para una carga vertical unitaria y positiva moviéndose sobre la vi -

ga.

Por ejemplo, en el ábaco 39-1:

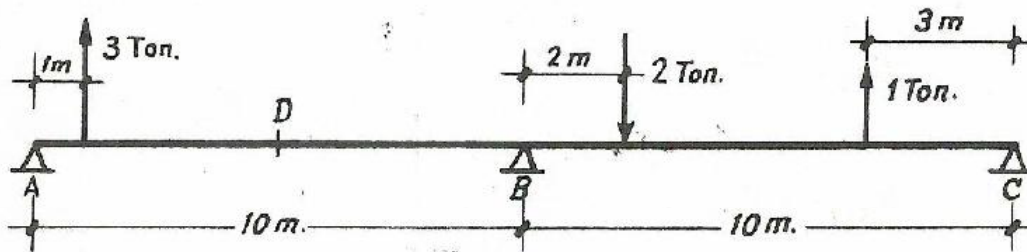
Si tenemos una carga puntual P que actúa a una distancia a del apoyo izquierdo del tramo primero de luz L , calculamos $\delta = a/L$ para este valor de δ tenemos un valor de K_1 , entonces el momento flector en el centro de dicho tramo primero será igual a $PL K_1$.

Si en vez de una carga puntual, tenemos varias P_i hacemos la misma operación para cada una de ellas independientemente de las demás y el momento buscado es la suma con su signo de los momentos flectores que producen cada una de las fuerzas.

Si tenemos una carga uniformemente repartida a lo largo de un tramo hemos de multiplicar pL^2 por el coeficiente que den las tablas que acompañan a los ábacos.

-o-

24. Calcular el momento flector en el centro del tramo AB, cuando sobre la viga actúan las cargas de la figura.



Momento flector en D debido a la carga $P_1 = 3$ ton.

$$\delta = \frac{a}{L} = \frac{1}{10} = 0,10 \quad K_1 = -0,035 \quad M_D = -3 \cdot 10 \cdot 0,035 = -1,05 \text{ mT.}$$

Momento flector en D debido a la carga $P_2 = -2$ ton.

$$\delta = \frac{a}{L} = \frac{2}{10} = 0,20 \quad K_1 = 0,037 \quad M_D = -2 \cdot 10 \cdot 0,037 = -0,740 \text{ mt.}$$

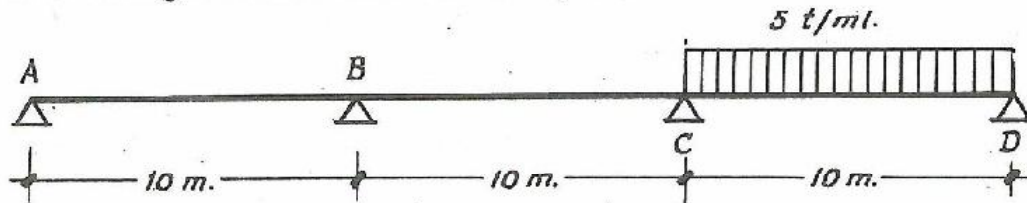
Momento flector en D debido a la carga $P_3 = 1$ Tn.

$$\delta = \frac{a}{L} = \frac{7}{10} = 0,7 \quad K_1 = 0,035 \quad M_D = 1 \cdot 10 \cdot 0,035 = 0,35 \text{ mt.}$$

Momento flector en D $M_D = -1,05 - 0,74 + 0,35 = -1,44 \text{ mT.}$

-o-

25. Calcular el momento en el apoyo B cuando en el tramo CD actúa una carga uniforme de 5 T/m.

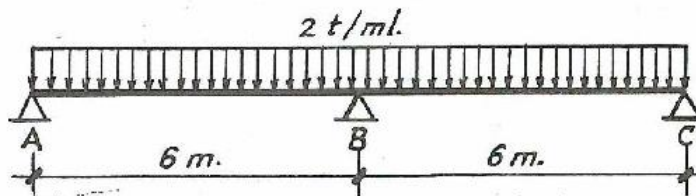


En el ábaco 39-2 de la publicación núm. 100 del ITCC, tenemos:

$$M_2 = pL^2 K \quad K = -0,0167 \quad M_D = -5 \cdot 10 \cdot (-0,0167) = 0,835 \text{ mT.}$$

-0-

26. Calcular las reacciones de los apoyos en la viga continua de la figura:



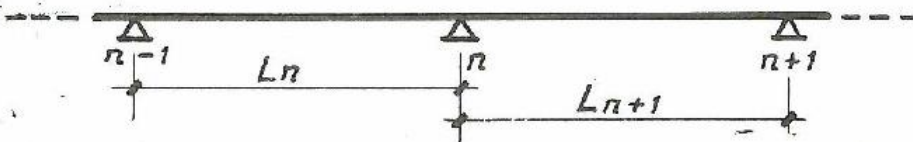
El momento flector en B utilizando la tabla 39-1 vale:

$$M_B = pL^2 \cdot 0,125 = -2 \cdot 6^2 \cdot 0,125 = -9 \text{ mT.}$$

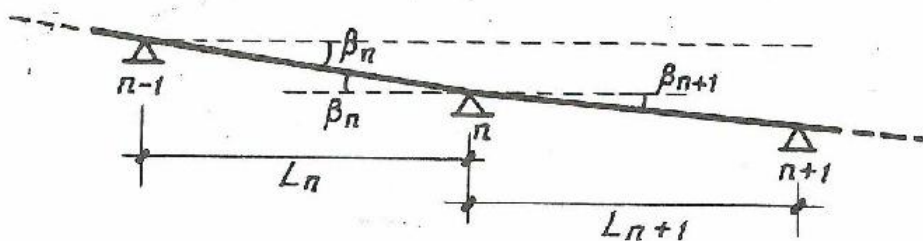
Conocido $M_C = -9 \text{ mT}$ calculamos las reacciones como hicimos en el ejemplo 1 del apartado dedicado a vigas continuas).

5.2 Descenso de un apoyo.

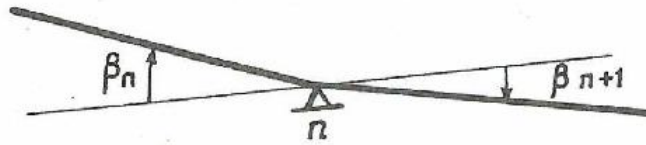
Destaquemos en una viga continua, dos tramos de la misma que incidan en el nudo n.



Si se produce un descenso de apoyos tal como el indicado.



Ampliando el nudo n, tenemos:



Para establecer la continuidad de los tramos en el nudo n, tendríamos que:

al ángulo girado en el extremo n del tramo n-1,n restarle el ángulo β_n .

al ángulo girado en el extremo n del tramo n,n+1 sumarle el ángulo β_{n+1} .

$$\omega_n \Big|_{n-1}^n = \bar{\omega}_n \Big|_{n-1}^n + \frac{M_{n-1} L_n}{6 EI} + \frac{M_n L_n}{3 EI} - \beta_n$$

$$\omega_n \Big|_n^{n+1} = \bar{\omega}_n \Big|_n^{n+1} - \frac{M_n L_{n+1}}{3 EI} - \frac{M_{n+1} L_{n+1}}{6 EI} - \beta_{n+1}$$

Con lo cual ya podemos poner:

$$\omega_n \Big|_{n-1}^n = \omega_n \Big|_n^{n+1}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\beta_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{L_n}, \quad \beta_{n+1} = \frac{h_{n+1} - h_n}{L_{n+1}}$$

siendo h_i el descenso del nudo i.

Podemos calcular los momentos y conocidos los momentos, la reacciones.

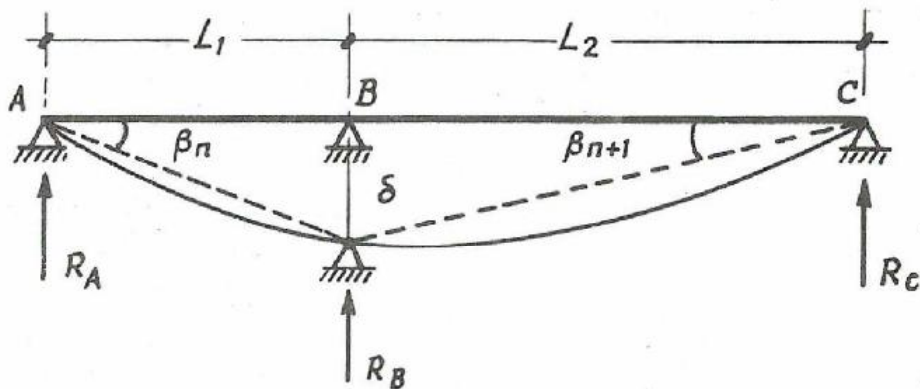
Conocidos ya las reacciones podemos conocer la ley de momentos flectores.

En algunos casos de descensos de apoyos como también en los de apoyos elásticos, no es necesario recurrir a la ecuación

de los tres momentos para resolver el problema, nos bastará (véanse ejemplos) recurrir al artificio de estudiar la pieza - prescindiendo de un apoyo, calcular la flecha del apoyo que desciende y determinar la reacción para que la flecha final sea igual al descenso del apoyo.

-o-

27. Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos que se producen en una viga continua sobre tres articulaciones producidas por un descenso δ de la articulación central.



Aplicamos las ecuaciones teniendo en cuenta que al no haber sollicitación exterior se cumple que:

$$\widehat{\omega}_n \Big|_{n-1}^n = 0 \quad \widehat{\omega}_n \Big|_n^{n+1} = 0$$

Por otra parte por ser A y C extremos de viga :

$$M_A = M_{n-1} = 0 \quad ; \quad M_C = M_{n+1} = 0$$

Además:

$$\beta_n = \frac{\delta}{L_1} \quad ; \quad \beta_{n+1} = -\frac{\delta}{L_2}$$

Tendremos por tanto:

$$\frac{M \cdot L_1}{3 EI} - \frac{\delta}{L_1} = -\frac{M L_2}{3 EI} + \frac{\delta}{L_2}$$

siendo M el momento en B.

$$\delta \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{M}{3 EI} (L_1 + L_2)$$

$$M = \frac{3 EI \delta}{L_1 L_2}$$

Una vez determinado el momento obtenemos fácilmente las reacciones:

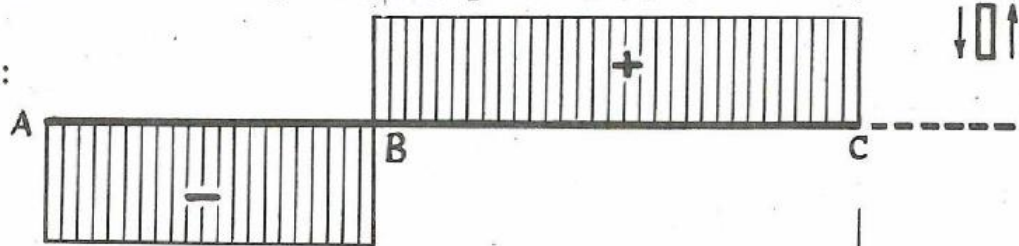
$$R_C = \frac{M}{L_2} = \frac{3 EI \delta}{L_1 L_2^2}$$

$$R_A = \frac{M}{L_1} = \frac{3 EI \delta}{L_1^2 L_2}$$

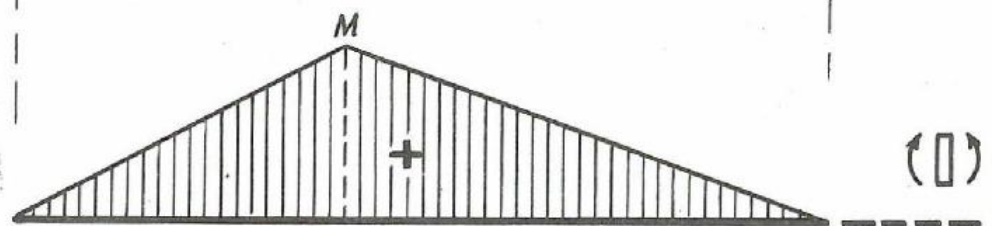
$$R_B = - \left(\frac{M}{L_2} + \frac{M}{L_1} \right) = - \frac{3 EI \delta}{L_1 L_2^2} (L_1 + L_2)$$

Las leyes de esfuerzos, serán, por tanto:

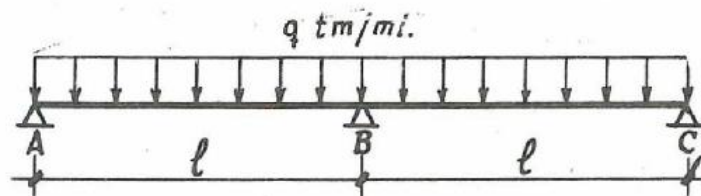
Cortantes:



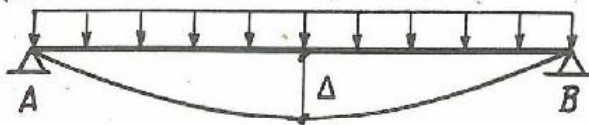
Flectores:



28. Una viga sobre tres apoyos equidistantes está sometida a la acción de una carga uniformemente repartida de intensidad q . Hallar la reacción en el apoyo central si éste, por la acción de la carga, cede y desciende una cantidad δ .



Veamos cuál sería el descenso de la viga ABC si quitásemos el apoyo B.

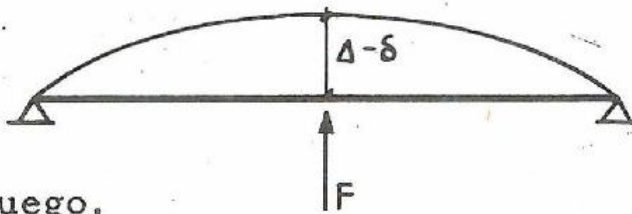


En la tabla T. 35.1 monografía 100

$$\Delta = - \frac{q \cdot 5 \cdot (2l)^4}{384 EI}$$

Si ahora suponemos una viga biapoyada de longitud $2l$ con una fuerza en el centro del vano que produzca un corrimiento del punto medio de la viga igual y de signo contrario al Δ , esa fuerza sería la reacción en el apoyo B si este no hubiera descendido una cantidad δ .

La verdadera reacción sería aquella fuerza que produjera un corrimiento hacia arriba del centro de la viga, de valor $\Delta - \delta$.



En la tabla T. 35-1, tenemos:

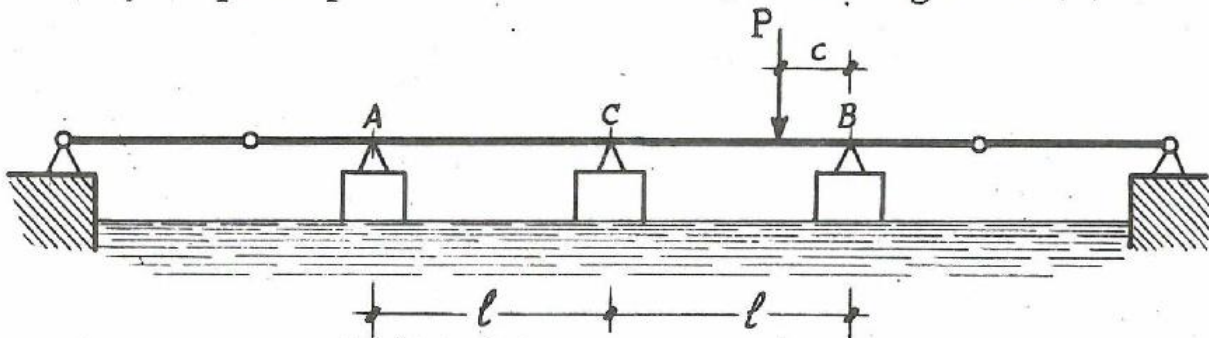
$$\Delta - \delta = F \frac{(2l)^3}{48 EI}$$

luego,

$$F = \frac{48 EI}{(2l)^3} \left[\frac{5 q (2l)^4}{384 EI} - \delta \right]$$

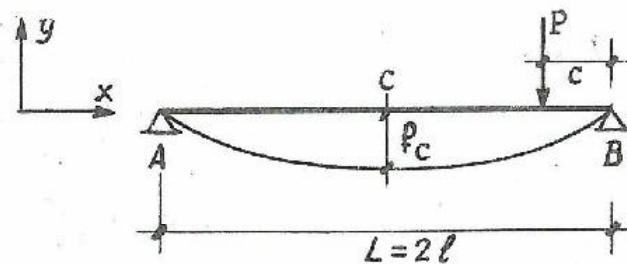
-o-

29. Determinar la reacción de la viga ABC apoyada sobre tres pontones, si el área de la sección recta de cada pontón es A y el peso por unidad de volumen del agua es γ .



Vamos a prescindir del apoyo C. La flecha producida en el punto C de la viga AB por la carga P consta de dos partes:

- 1º. Flecha debida a la flexión de la viga. (T. 35-1, monografía 100).

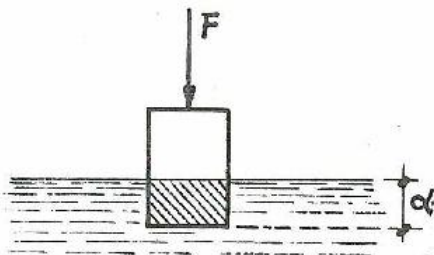


$$f_C = - \frac{P_C}{6 EI} \left(1 - \frac{L-C}{L}\right) \left[2L(1-C) - (L-C)^2 - x^2 \right]_{x=L/2} = \frac{P_C}{48 EI} [3L^2 - 4C^2]$$

2º. Flecha debida al descenso de los pontones A y B.

Si sobre un pontón actúa una fuerza F y se hunde debido a ella una altura α quiere decir que:

$$F = \alpha \cdot A\gamma \quad \text{luego,} \quad \alpha = \frac{F}{A\gamma}$$



Considerando la viga AB biapoyada, las reacciones en los apoyos debidos a P, son :

$$R_A = \frac{P_C}{L}$$

$$R_B = \frac{P(L-C)}{L}$$

El descenso del pontón A, será:

$$\alpha_A = \frac{P \cdot C / L}{A\gamma}$$

El descenso del pontón B, será:

$$\alpha_B = \frac{P(L-C)/L}{A\gamma}$$

Luego el descenso de C que está situado en el punto medio será:

$$\alpha_C = \frac{\alpha_A + \alpha_B}{2} = \frac{\frac{P \cdot C}{L} + \frac{P(L-C)}{L}}{2 A\gamma} = \frac{P}{2 A\gamma}$$

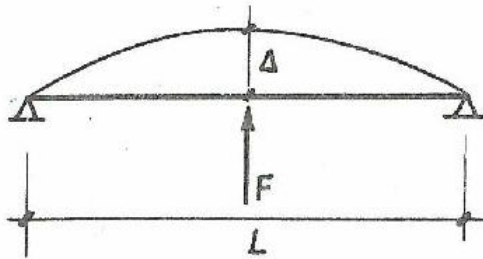
El descenso total de C, será:

$$\delta = f_c + \alpha = \frac{P_C}{48 EI} [3 L^2 - 4 C^2] + \frac{P}{2A\gamma}$$

Si en la viga AB hacemos actuar una fuerza en C, esta fuerza producirá un corrimiento en C que se compondrá de dos partes:

1) Flecha debida a la flexión:

$$\Delta = \frac{FL^3}{48 EI}$$



2) Flecha debida al levantamiento de los pontones:

$$\alpha_C = \frac{F}{2 A \gamma}$$

El levantamiento total, será:

$$\delta_1 = \Delta + \alpha_C = \frac{FL^3}{48 EI} + \frac{F}{2 A \gamma}$$

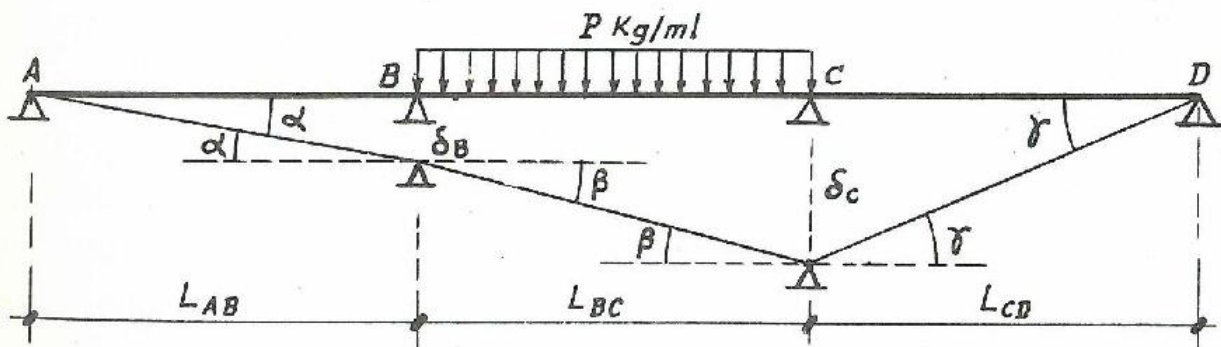
La diferencia $\delta - \delta_1$ es el descenso verdadero del punto C debido a la reacción F_1 que sobre él actúa y que será dicho descenso igual a $F/\gamma A$, como ya vimos; luego:

$$\delta - \delta_1 = \frac{F}{\gamma A}$$

Sustituyendo los valores de δ y δ_1 de esta ecuación obtenemos F es decir, la reacción en C. Conocida la reacción en C se calcula fácilmente en A y B.

-o-

30. En la viga continua de la figura, calcular las reacciones en los apoyos sabiendo que los apoyos B y C han descendido una magnitud δ_B y δ_C respectivamente respecto a la horizontal.




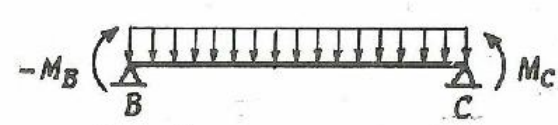
En el nudo B , tenemos:

$$\omega_B \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. = \hat{\omega}_B \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. = \frac{M_B \cdot L_{AB}}{3 EI} - \alpha$$

$$\omega_B \left| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right. = \hat{\omega}_B \left| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right. = \frac{M_B L_{BC}}{6 EI} - \frac{M_C L_{BC}}{6 EI} - \beta$$

Sabiendo que

$$\hat{\omega}_B \left| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right. = 0$$


$$\hat{\omega}_B \left| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right. = - \frac{PL_{BC}^3}{24 EI}$$


$$\alpha = \frac{\delta_B}{L_{AB}} \quad \beta = \frac{\delta_C - \delta_B}{L_{BC}}$$

Igualando los giros ω_B en los tramos AB y BC, tenemos una ecuación que nos liga M_B y M_C .

En el nudo C, tenemos:

$$\omega_C \left| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right. = \hat{\omega}_C \left| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right. + \frac{M_B L_{BC}}{6 EI} + \frac{M_C L_{BC}}{3 EI} - \beta$$

$$\omega_C \left| \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right. = \hat{\omega}_C \left| \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right. = \frac{M_C L_{CD}}{3 EI} + \gamma$$

Como

$$\gamma = \frac{\delta_C}{L_{CD}}$$

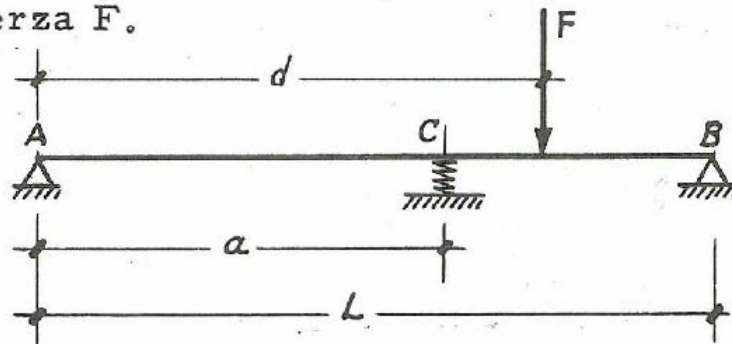
$$\hat{\omega}_C \left| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right. = \frac{PL_{BC}^3}{24 EI}$$

$$\hat{\omega}_D \left| \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right. = 0$$

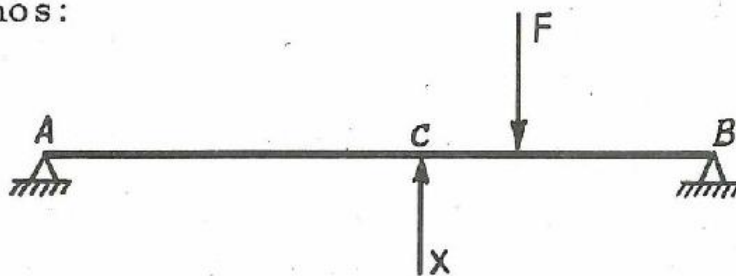
Igualando los giros ω_C en los tramos BC y CD tenemos otra ecuación que nos liga a M_B y M_C .

Entre esas dos ecuaciones despejamos los momentos M_B y M_C .
Conocidos los momentos el proceso del cálculo de las reacciones es ya conocido.

31. Calcular el descenso del punto C y la reacción producida por el apoyo elástico de la figura, cuando actúa en un punto de ella una fuerza F.



Si sustituimos el apoyo elástico por su reacción X sobre la viga, tendremos:



Según este esquema y utilizando las tablas del Torroja (monografía 100, pág. 36), el descenso del punto C será:

$$y = -\frac{FA}{6 EI} \left(1 - \frac{d}{L}\right) (2Ld - d^2 - a^2) + x \cdot \frac{a^2}{3 EIL} (L-a)^2$$

Este descenso y del punto C tiene que ser igual que el acortamiento producido en el resorte elástico por la reacción X.

Este acortamiento valdrá:

$$\frac{x}{k}$$

siendo k la constante del resorte. Igualando este valor al de y , obtenemos:

$$X = \frac{F \frac{a}{6 EI} \left(1 - \frac{d}{L}\right) (2Ld - d^2 - a^2)}{\frac{a^2}{3 EI} (L-a)^2 - \frac{1}{k}}$$

Conocida x el descenso del punto C será como sabemos,

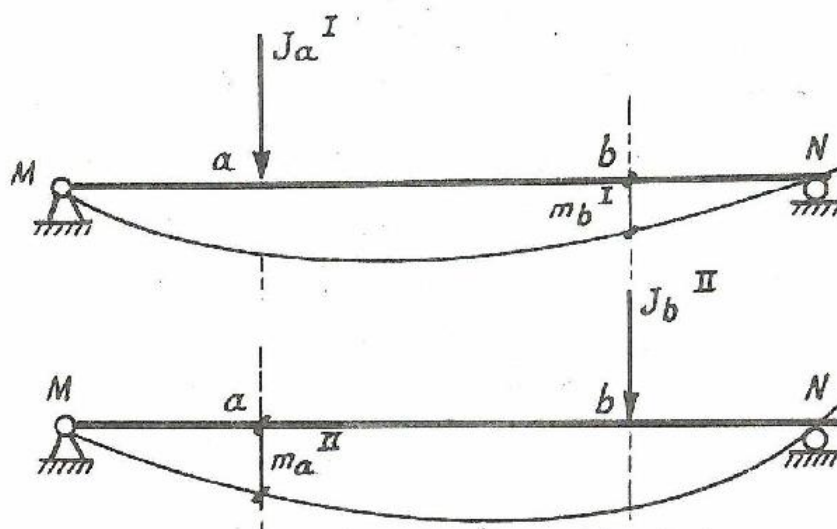
$$\delta_C = -\frac{x}{k}$$

6-1. - LINEA DE INFLUENCIA. - 6-2. CARGAS MOVILES.

-0-

6-1. - DETERMINACION DE LINEAS DE INFLUENCIA. - El método se basa en el teorema de reciprocidad, demostrado en el Torroja (Monografía 71, ap. 29).

Si sobre una viga apoyada, MN, actúa en la rebanada a una fuerza que vamos a llamar J_a^I , la viga habrá experimentado una



deformación y , en particular, la rebanada b habrá sufrido un corrimiento m_b^I ("corrimiento en la rebanada b debido a la fuerza I").

Si en lugar de esto, hubiese actuado la fuerza J_b^{II} en la rebanada b (figura adjunta), el corrimiento de a como consecuencia del nuevo estado de carga II, sería m_a^{II} .

Entonces, el teorema de reciprocidad nos dice que se cumple la igualdad:

$$J_a^I \cdot m_a^{II} = J_b^{II} \cdot m_b^I$$

o, de otra forma, que "el trabajo realizado por la fuerza J_a^I , al aplicar sobre la viga la fuerza J_b^{II} , es igual al trabajo realizado por J_b^{II} al actuar J_a^I ".

Cuando en lugar de actuar sobre la estructura una única fuera

za. Como en este caso, se tratasen de dos grupos de fuerzas y momentos J_a^I y J_b^{II} la expresión del teorema sería:

$$\underline{\underline{\Sigma J_a^I m_a^{II} = \Sigma J_b^{II} \cdot m_b^I}}$$

Si alguna de las cargas que actúan sobre la estructura se moviese a lo largo de su directriz, se puede determinar, por el método de la línea de influencia, las variaciones que dicha carga, al moverse, producirá en alguna característica (reacción de apoyo, esfuerzos o movimientos en una rebanada) de una sección determinada de la estructura; como consecuencia, se podrá conocer la posición de la carga móvil más desfavorable, para la sección que estamos considerando, es decir, aquella posición que nos produzca un máximo en el valor de la característica que estudiamos.

La línea de Influencia es, por lo tanto, la línea, cuyas ordenadas medidas sobre el eje de la pieza, representan los valores de un determinado esfuerzo o movimiento en una sección, producida por un influjo unidad, que se va moviendo a lo largo de la pieza.

Hay que señalar, pues, que la línea de influencia:

-Se refiere a una sección determinada, y así el enunciado del problema dirá: "Determinar para la sección X...".

-Se refiere a un determinado esfuerzo o movimiento en dicha sección, y así podremos determinar la línea de influencia de una reacción en un apoyo, o de un esfuerzo (momento flector o esfuerzo cortante) o de un movimiento (giro o corrimiento) en la sección considerada.

- Se determinará para un influjo unidad (fuerza o momento), - que se mueve sobre la directriz de la pieza.

Tres tipos distintos de problemas se nos pueden presentar:

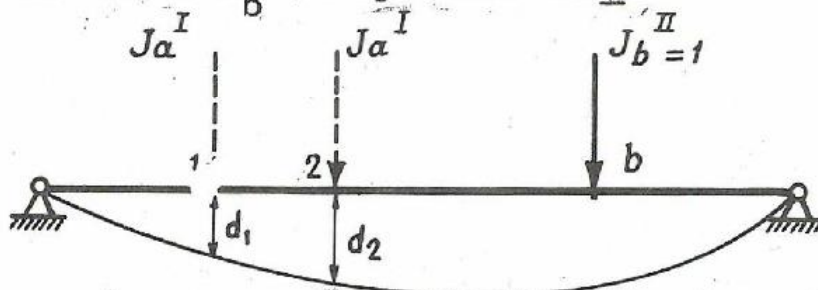
A) Determinación de la línea de Influencia de un movimiento (giro o corrimiento).

Si, por ejemplo, queremos determinar la L. de I. del corri

miento en la sección \underline{b} debido a una fuerza vertical unitaria, por el teorema de reciprocidad nos bastará con calcular la elástica o deformada de la pieza para una fuerza vertical actuando en la sección \underline{b} que estamos considerando, pues si en la fórmula hacemos $J_a^I = J_b^{II} = 1$, resulta que:

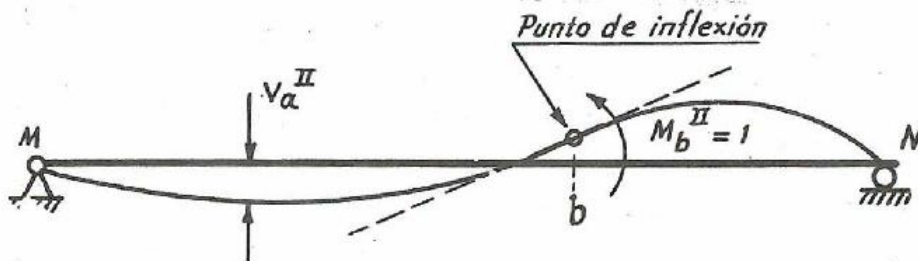
$$\underline{m_a^{II} = m_b^I}$$

lo que quiere decir que la flecha en \underline{b} debida a J_a^I , que es lo que estamos buscando, es igual que la producida en \underline{a} por J_b^{II} y, por lo tanto, el corrimiento de \underline{b} , cualquiera que sea el punto sobre el que actúa J_a^I , coincidirá con la ordenada en ese punto de la elástica de la fuerza $J_b^{II} = 1$ aplicada en \underline{b} .



La figura es, pues, la línea de influencia del corrimiento en la rebanada \underline{b} debido a la fuerza vertical $J_b^{II} = 1$ que se mueve sobre la viga. Las magnitudes d_1 y d_2 son las flechas que se producirán en \underline{b} cuando la fuerza $J_a^I = 1$ esté aplicada en las secciones 1 y 2 respectivamente.

1. La línea de influencia del giro en la sección \underline{b} debido a una fuerza vertical en la viga de la figura.



En este caso a $J_a^I = 1$ y queremos determinar el giro ω_b^2 (giro en \underline{b} debido a la fuerza I).

Por lo tanto, la línea de influencia pedida coincidirá con la

elástica del momento $M_b^{II} = 1$ aplicada en b , pues:

$$(J_a^I = 1) v_a^{II} = (M_b^{II} = 1) \cdot \omega_b^I$$

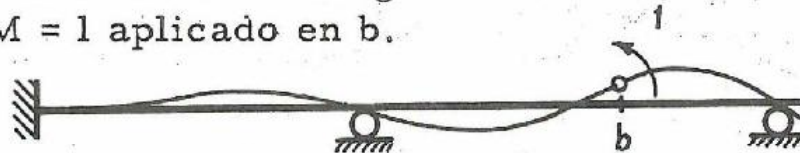
$$v_a^{II} = \omega_b^I$$

-o-

2. En la viga de la figura determinar la línea de influencia de los giros y de las flechas en la sección b debido a una fuerza vertical.



La línea de influencia de los giros coincide con la elástica de un momento $M = 1$ aplicado en b .



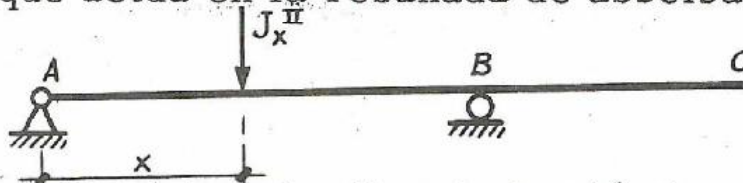
La línea de influencia de la flecha será la elástica de una fuerza $F = 1$ aplicada en b .



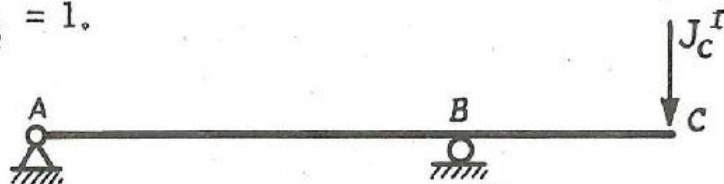
-o-

3. Trazar la línea de influencia del corrimiento vertical del extremo C , cuando sobre la viga actúa un influjo $J_x^I = 1$.

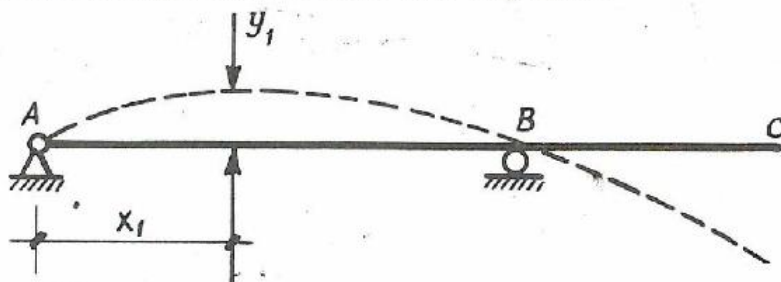
$J_x = 1$ influjo que actúa en la rebanada de abscisa x .



La línea de influencia coincide con la elástica producida por un influjo $J_c^I = 1$.



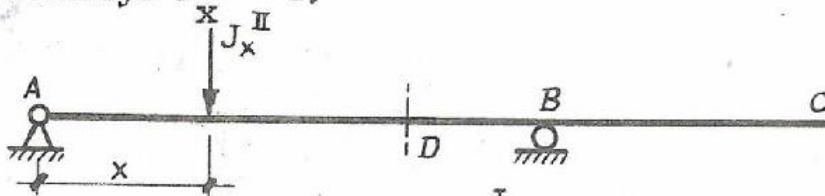
La elástica tiene la forma en trazos.



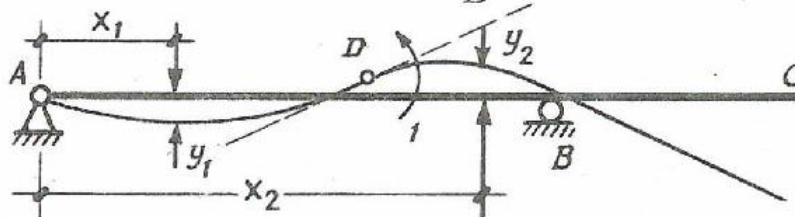
Cuando el influjo J^{II} actúa en $x = x_1$ la flecha en C será y_1 .

-o-

4. Trazar la línea de influencia del giro en la rebanada D, debida a un influjo $J^{II} = 1$.



La elástica debida al momento $M_D^I = 1$ es:

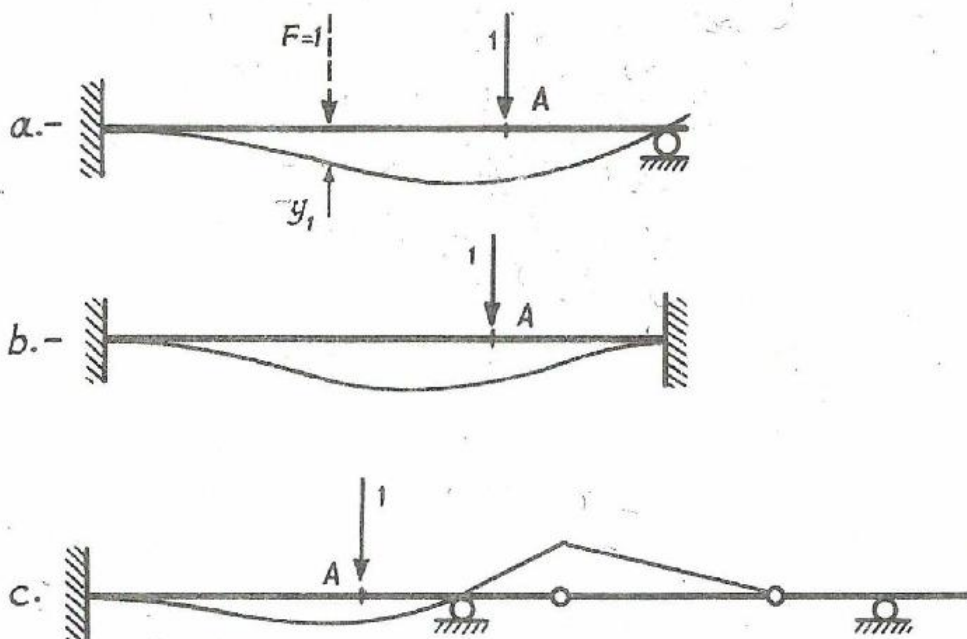


El giro en D cuando $J^{II} = L$ actúe en $x = x_1$ valdrá y_1 .
 " " " D " " $J^{II} = L$ " a " $x = x_2$ " " y_2 .

Vemos que el primer giro es de valor negativo y el segundo positivo.

-o-

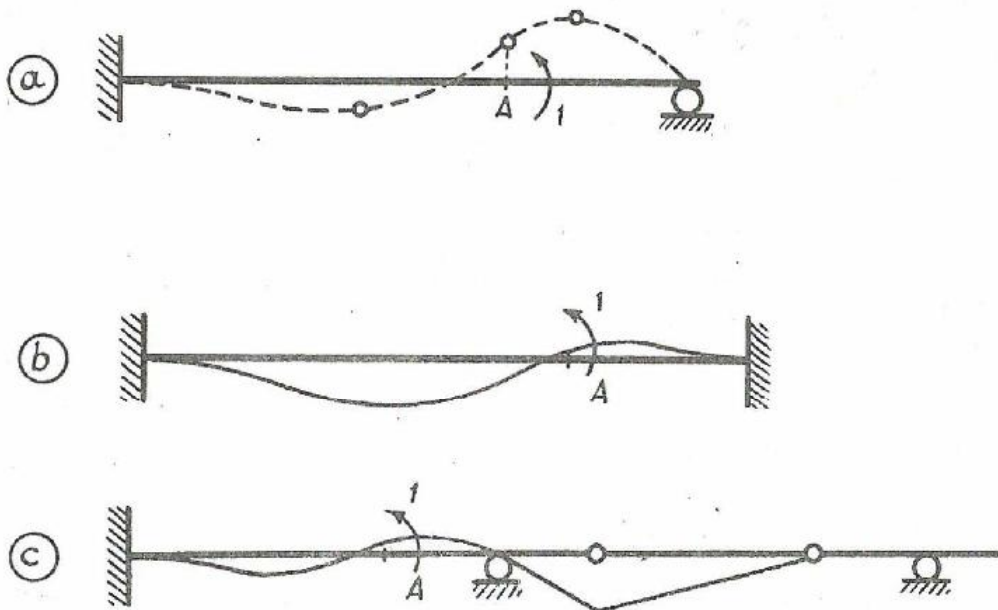
5. Línea de influencia de flechas en la rebanada A debidas a una carga unitaria F que se mueve sobre las vigas representadas.



En la viga a cuando $F = 1$ está en la posición indicada en la figura la flecha en la rebanada A será y_1 . Si $F = P$ la flecha será Py_1 .

-o-

6. En las vigas del ejemplo 5 dibujar la línea de influencia de los giros en la rebanada A.

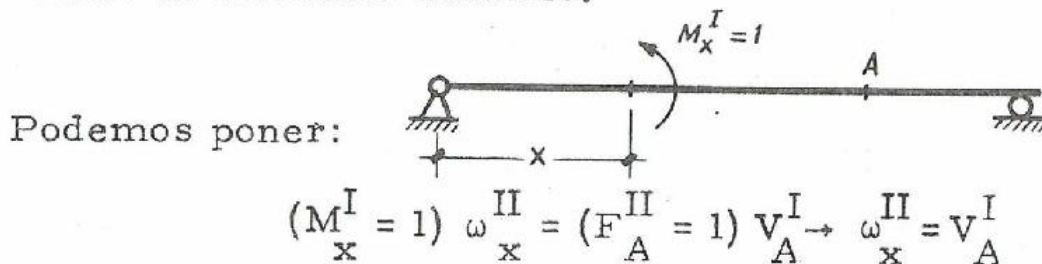


-o-

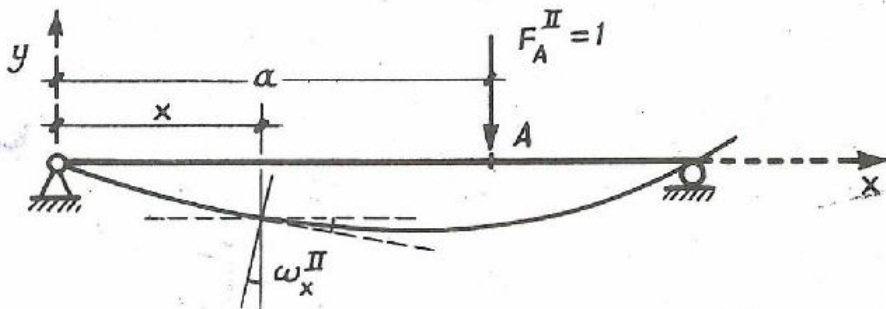
6-1. Hemos visto hasta ahora las líneas de influencia de flechas y giros en una determinada sección, debidas a una fuerza vertical unitaria. En este caso vimos que la línea de influencia coincidirá con la elástica. No ocurre lo mismo si queremos determinar la línea de influencia de flechas y giros en una sección debida a un momento unitario que se mueve sobre la viga, en este caso hemos de recurrir a un procedimiento analítico y nuestra línea de influencia no será la elástica como ocurría en el primer caso sino la derivada de dicha elástica.

-o-

7. La línea de influencia de la flecha en A cuando sobre la viga actúa un momento unitario.



La elástica de la viga debida a la fuerza $F_A^{II} = 1$ aplicada en la sección es:



La ecuación de la elástica (Ver tabla T 35.1 del núm. 100), es:

- Entre $\underline{0}$ y \underline{a} ; $y = -\frac{F_A^{II}}{6 EI} \left(1 - \frac{a}{l}\right) (2lx - a - x^2 - x^3)$

- Entre \underline{a} y \underline{l} ; $y = -\frac{F_A^{II}}{6 EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right) (2lx - a^2 - x^2)$.

Por tanto, la línea de influencia será:

- Entre $\underline{0}$ y \underline{a} ; ; $y = -\frac{1}{6 EI} \left(1 - \frac{a}{l}\right) (2la - a^2 - 3x^2)$

- Entre \underline{a} y \underline{l} ; $y = -\frac{1}{6 EI} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) (2l - 2x) - \frac{1}{l} (2lx - a^2 - x^2) \right]$

-o-

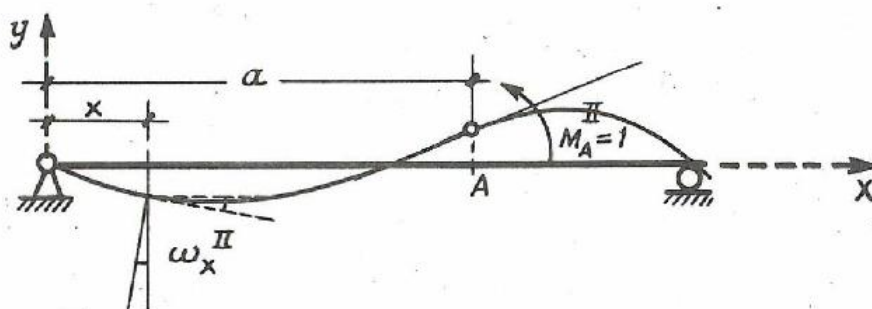
8. Línea de influencia del giro A cuando sobre la viga del ejemplo anterior actúa un momento unitario.

Podemos poner:

$$(M_x^I = 1) \omega_x^{II} = (M_A^{II} = 1) \omega_A^I$$

$$\omega_a^{II} = \omega_A^I$$

La elástica de la viga debida a un momento $M_A^I = 1$ actuando en la sección A es:



La ecuación de dicha elástica es para el tramo (0, a):

$$y = - \frac{M}{6 EIL} (6 La - 3a^2 - 2L^2 - x^2)$$

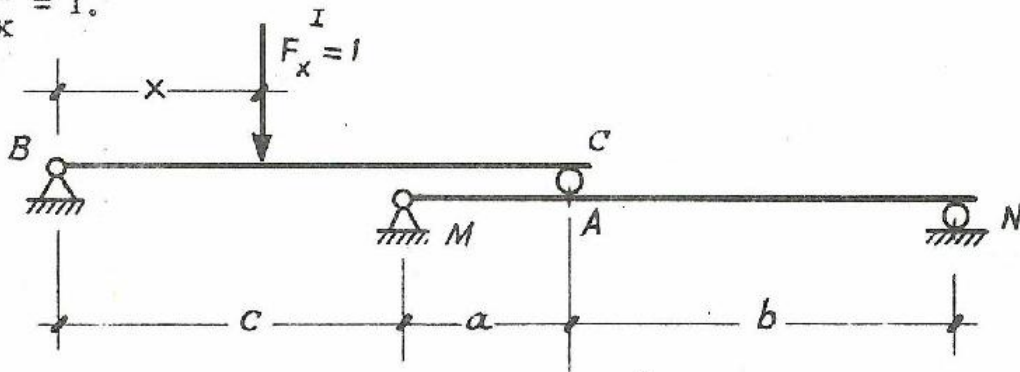
y la curva que buscamos, será para este intervalo:

$$y' = - \frac{M}{6 EIL} (6 La - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2)$$

Análogamente calcularíamos para el intervalo (a, ℓ),

-o-

9. Construir la línea de influencia de la flecha en la rebanada A de la viga MN cuando sobre la viga BC actúa una fuerza vertical $F_x^I = 1$.



Cuando F_x^I actúa a una distancia x del apoyo B la reacción del apoyo C, sobre la viga BC, es una fuerza F_I dirigida hacia arriba de valor:

$$F_I = \frac{F_x^I \cdot x}{a + c} = \frac{x}{a + c}$$

Por tanto, la acción de la viga BC sobre la MN es una fuerza vertical aplicada en A y dirigida hacia abajo de valor:

$$F = F_I = \frac{x}{a + c}$$

La flecha que se produce en la rebanada A por la actuación de una fuerza F es (ver tabla T 35-1 del núm. 100).

$$V_a = \frac{F a^2}{3 EIL} (\ell - a)^2$$

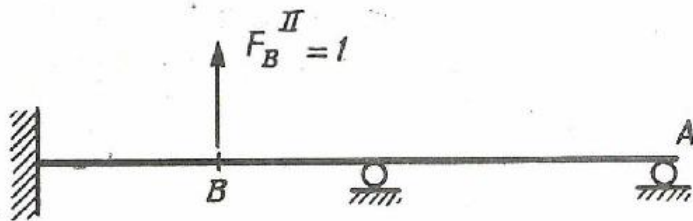
Como $\ell = a + b$ y $F = \frac{x}{a+c}$, tenemos:

$$V_a = \frac{x a^2}{3 EI} \cdot \frac{b^2}{(a+b)(a+c)} = \text{Cte.} \cdot x$$

Es decir, la línea de influencia es una recta.

6-1. Determinación de la línea de Influencia de una reacción de apoyo (reacción vertical o momento de empotramiento).

El teorema de reciprocidad nos va a permitir también reducir este problema al de de - terminación de una elástica.

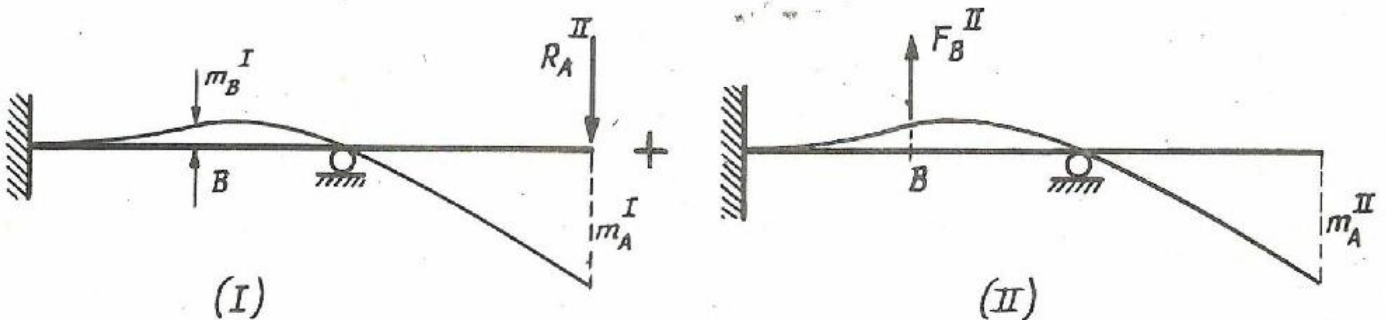


Supongamos que queremos co - nocer la línea de influencia de la reacción vertical en el apo -

yo A de la viga representada en la figura debida a una fuerza ver - tical unidad

$$(F_b^{II} = 1).$$

El principio de superposición nos permite escribir que el es - tado principal (el de la figura adjunta) es igual a la suma de los dos estados siguientes:



A estos dos estados (I) y (II) aplicamos el teorema de recipro - cidad y resulta que:

$$R_A^{II} \cdot m_A^{II} = F_B^{II} \cdot m_B^I$$

y teniendo en cuenta, que en el estado final el corrimiento del - punto A tiene que ser nulo, pues está unido al apoyo, que no se mueve, se ha de cumplir que:

$$m_A^I + m_A^{II} = 0 \quad \therefore \quad m_A^I = - m_A^{II}$$

y, entonces, de la expresión anterior resulta que, como $F_B^{II} = 1$,

$$R_A^{II} = - \frac{m_B^I}{m_A^I}$$

Estamos siguiendo en toda la notación del Torroja; a la reacción en A se le denomina R_A^{II} por estar producida por el Estado II de cargas en la sección A.

La expresión obtenida nos indica que la deformada del estado I viene a ser una representación de la línea de influencia de la reacción R_A^{II} , pues sus ordenadas multiplicadas por el factor $-\frac{1}{m_A^I}$ representan los valores de R_A^{II} .

Para determinar, entonces, la línea de influencia de una reacción de apoyo hay que liberar la coacción de apoyo y, después, obtener la elástica de la estructura por la acción de un influjo, correlativo de la coacción que se ha eliminado y de valor cualquiera. El valor del influjo es indiferente, porque los movimientos están en proporción directa con las fuerzas que los producen (los movimientos producidos por una fuerza $2x$, son dobles que los debidos a una fuerza x) y, entonces, el cociente

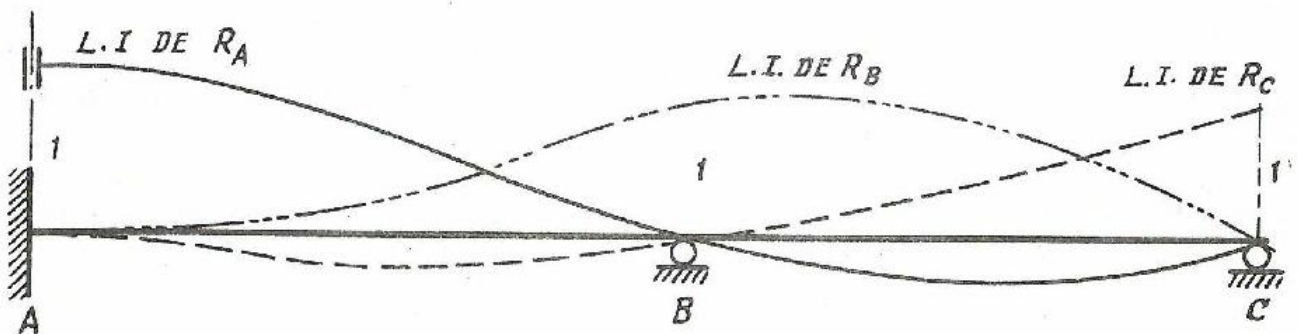
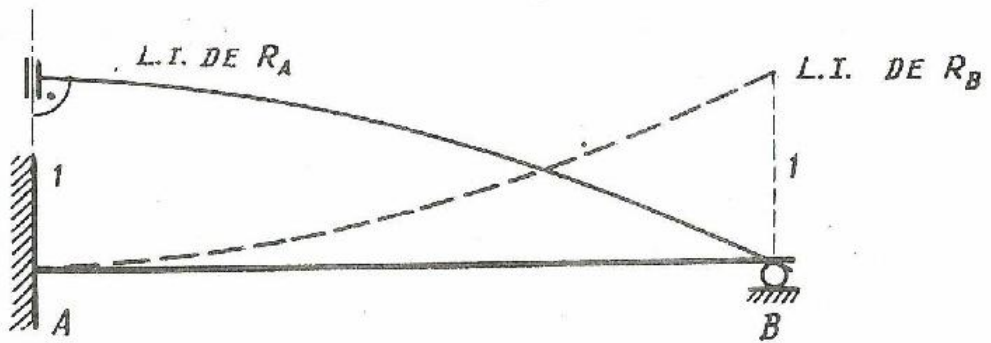
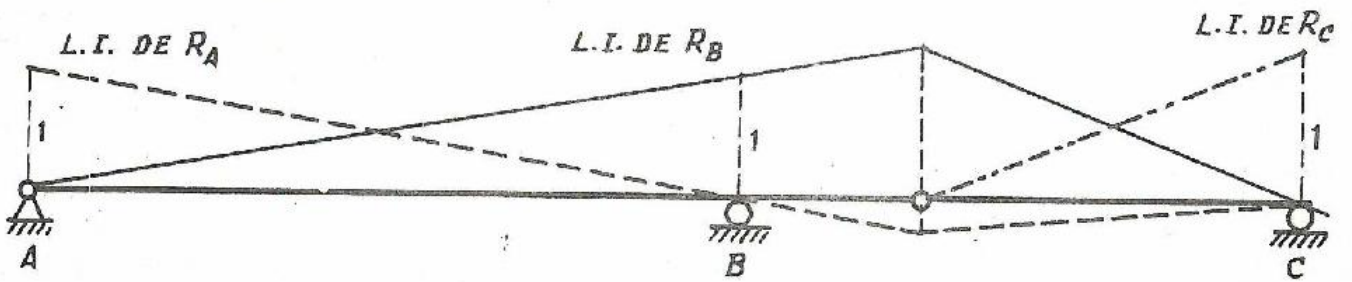
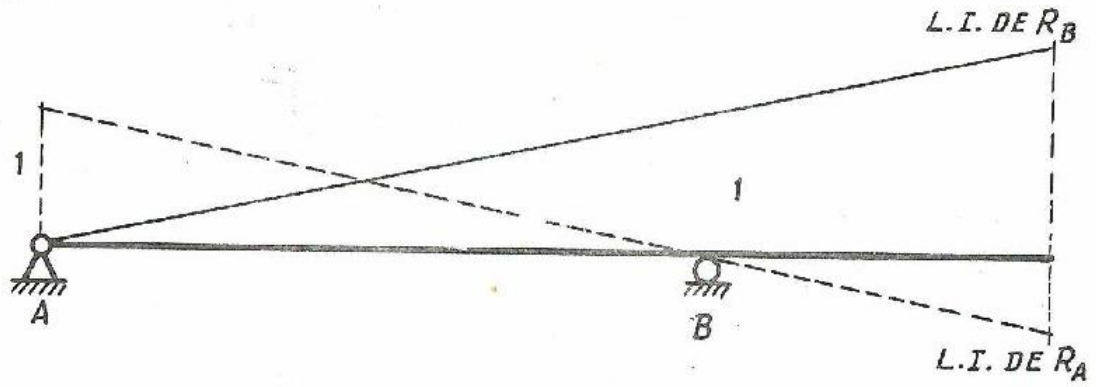
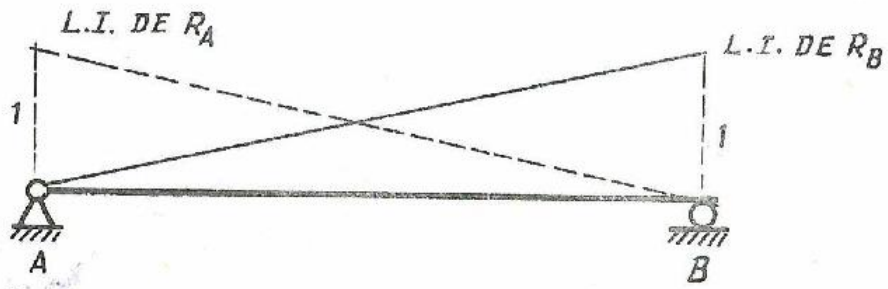
$$\left(- m_B^I / m_A^I \right)$$

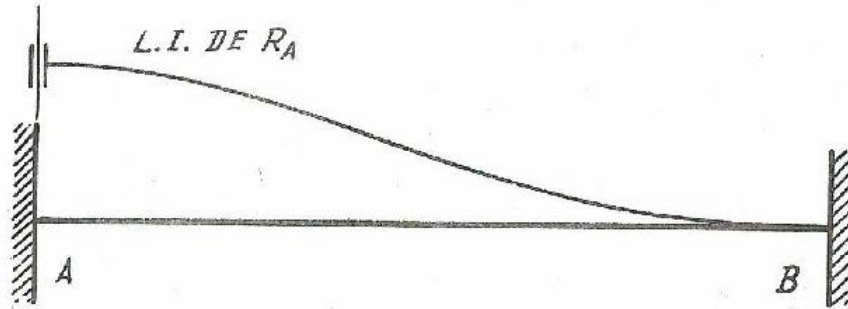
será siempre el mismo, cualquiera que sea el valor del influjo.

Los signos de los movimientos y de las reacciones son los del Torroja: positivos si van hacia arriba y negativos en caso contrario.

Si quisiéramos determinar la línea de influencia para la actuación de un momento unidad, repitiendo el razonamiento, obtendríamos dicha línea de influencia como derivada de la elástica indicada anteriormente.

10. Línea de influencia de las reacciones en los apoyos debidas a una fuerza $F = 1$ que se mueve sobre ellas:





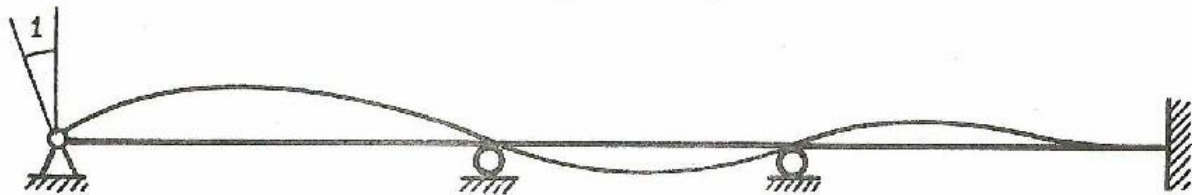
11. Determinar la línea de influencia del momento de empotramiento debido a una fuerza vertical unidad en las siguientes estructuras:



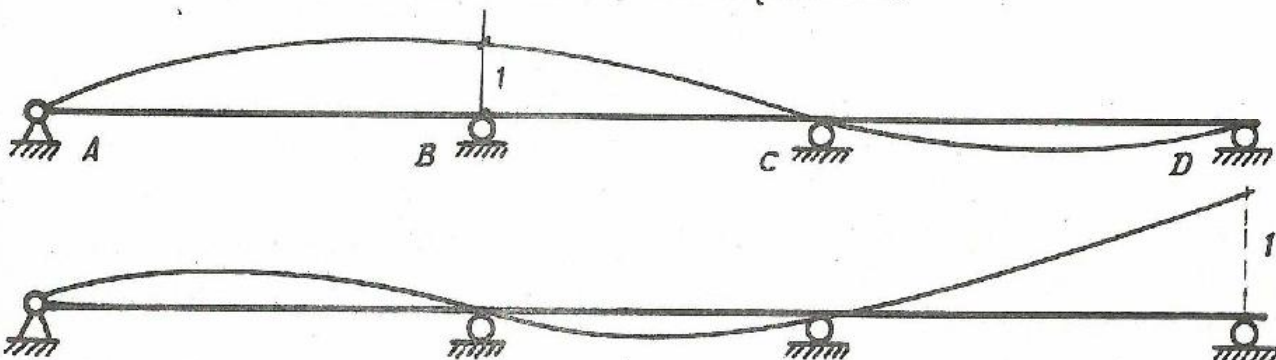
Al quitar la coacción resulta:



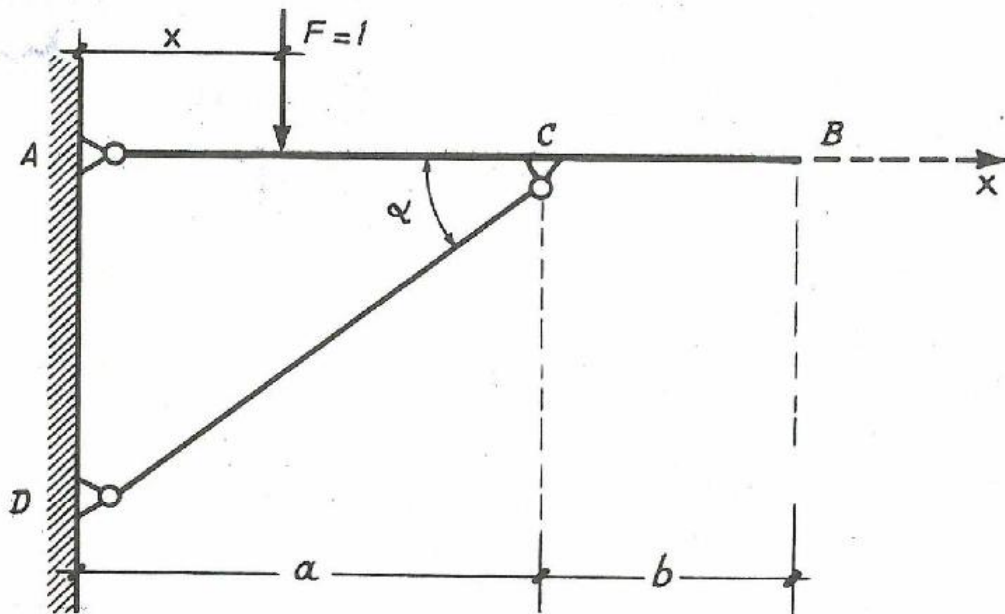
Quitando la coacción que impide el giro en A, resulta:



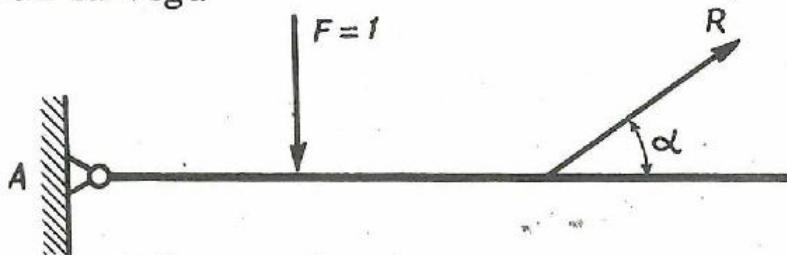
12. Línea de influencia de las reacciones en B y D debidas a la actuación de una fuerza vertical unidad.



13. Determinar la línea de influencia del esfuerzo en el puntal CD del apoyo de la viga horizontal AB de la figura, debida a la actuación de una fuerza vertical unidad. (Las dimensiones de las articulaciones son despreciables).



Estudiemos la viga



Tomando momentos en A.

$$a \cdot R \cdot \text{sen} \alpha = xF ;$$

$$R = \frac{xF}{a \text{ sen} \alpha}$$

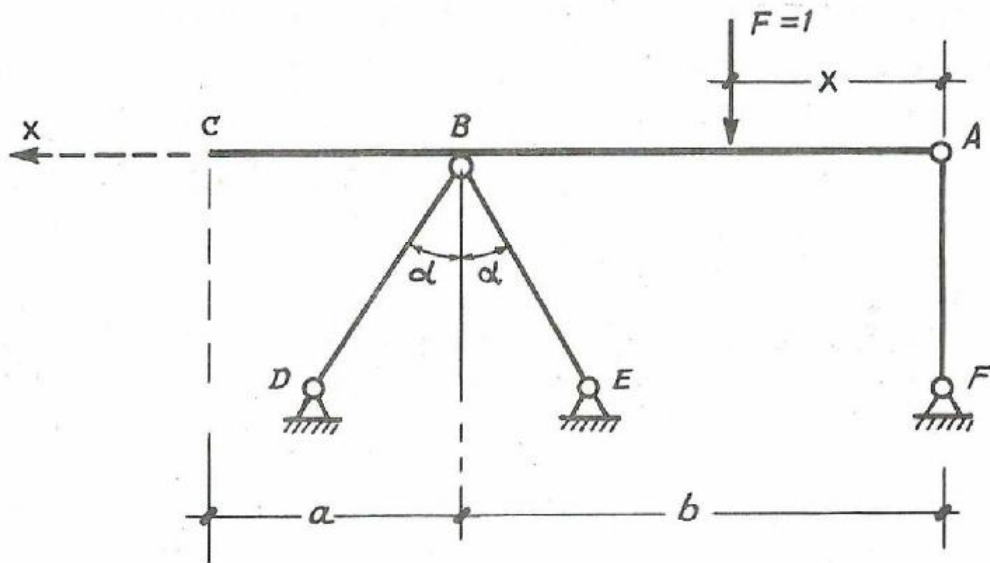
Como $F = 1$; $a \cdot \text{sen} \alpha = \text{constante}$, tenemos:

$$R = \frac{1}{\text{Cte}} x = K \cdot x$$

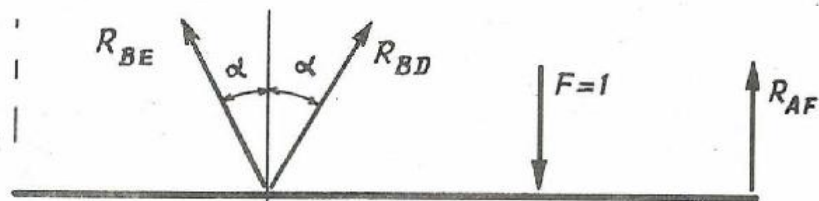
Es decir, la línea de influencia es una recta.

-o-

14. Construir la línea de influencia de los esfuerzos originados en las barras AF, BE y BD, debidas a la actuación de una fuerza vertical unidad:



En la barra CBA, tenemos:



Tomando momentos en A:

$$- F \cdot x + b R_{BE} \cdot \cos \alpha + b R_{BD} \cdot \cos \alpha = 0$$

Como $R_{BE} = R_{BD}$ ya que ha de verificarse el equilibrio de las fuerzas horizontales.

Tenemos:

$$F_x = 2 b R_{BE} \cos \alpha$$

$$R_{BE} = R_{BD} = \frac{x}{2 b \cos \alpha} = K \cdot x$$

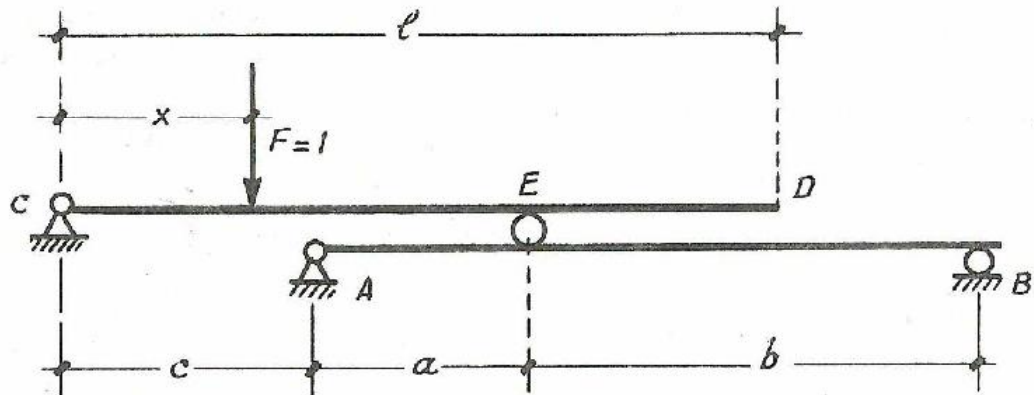
es decir, la línea de influencia será una recta.

Para determinar la línea de influencia en la barra AF, tomaremos momentos en B.

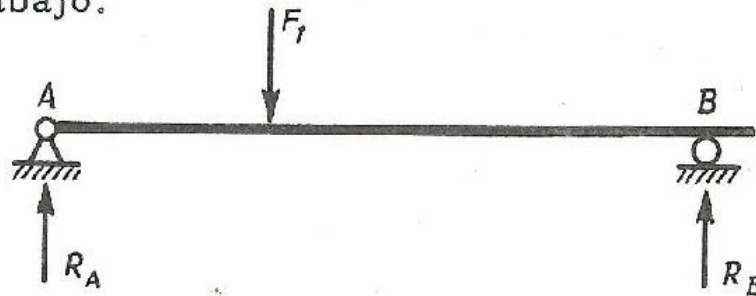
$$R_{AF} \cdot b = F (b-x) \quad \text{por tanto,}$$

$$R_{AF} = \frac{b-x}{b} \quad \text{que también es otra recta.}$$

15. Construir la línea de influencia de las reacciones en A, B y C en el sistema de la figura, para la actuación de una carga vertical unidad:



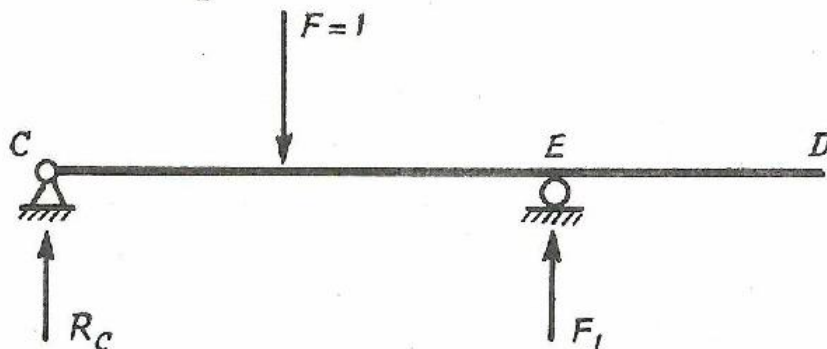
Cuando F está a una distancia x del apoyo C , la reacción en E es F_1 hacia arriba; luego sobre la viga AB actuará una fuerza F_1 hacia abajo.



Tomando momentos en A ; $(a+b) \cdot R_B = F_1 \cdot a$; $R_B = \frac{a}{a+b} F_1$

Tomando momentos en B ; $(a+b) R_A = F_1 \cdot b$; $R_A = \frac{b}{a+b} F_1$

Para determinar F_1 consideremos la viga CD .



Tomando momentos en C .

$$(a+c) F_1 = F \cdot x \quad ; \quad F_1 = \frac{Fx}{a+c} = \frac{x}{a+c}$$

Tomando momentos en E.

$$F(a+c-x) = R_C(a+c) ; \quad R_C = \frac{F(a+c-x)}{a+c} = 1 - \frac{x}{a+c}$$

que nos representa la línea de influencia de R_C .

Las de R_A y R_B las determinamos sin más que sustituir F_1 .

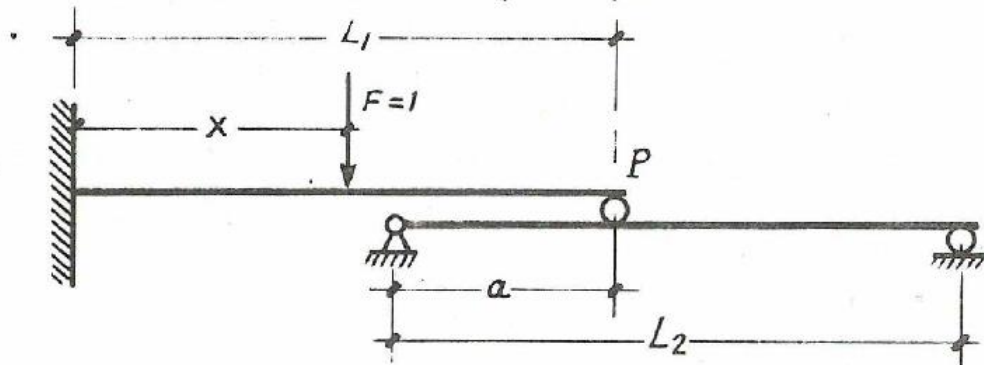
$$R_B = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a+c}$$

$$R_A = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{x}{a+c}$$

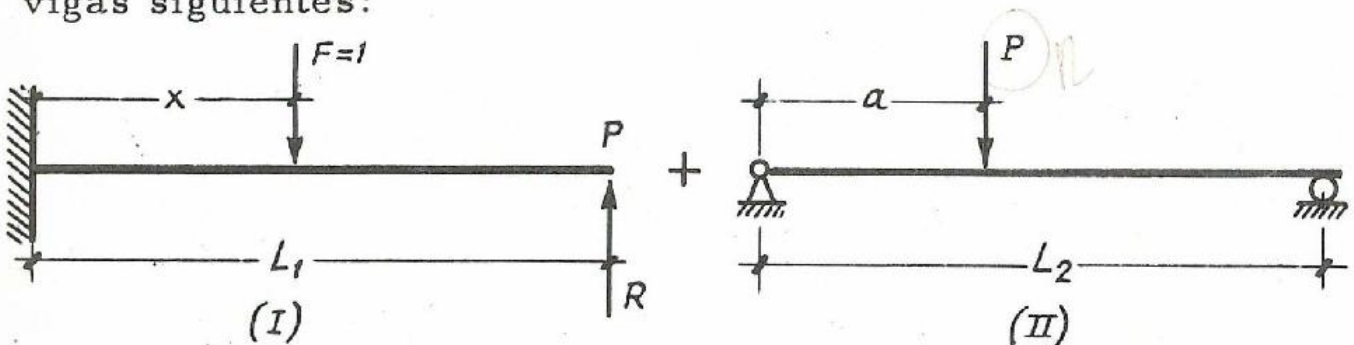
Todas ellas son lineales en x , y por tanto, rectas.

-0-

16. Línea de influencia de la reacción en el rodillo de la figura debida a una fuerza vertical ($F = 1$).



Este estado real se puede descomponer en la suma de las dos vigas siguientes:



El corrimiento del punto P como perteneciente a la viga (I) es (ver Torroja, monografía 100, pág. 31).

$$V_P^I = -Ix^2 \frac{3L_1-x}{6EI} + R \cdot \frac{L_1^3}{3EI}$$

el corrimiento de P como perteneciente a la viga (II) es: (pági-

na 36 de la monografía 100).

$$V_p^{II} = -R \frac{a^2}{3 EI L_2} (L_2 - a)^2$$

Como el descenso de P debe ser el mismo de las dos vigas:

$$V_p^I = V_p^{II}$$

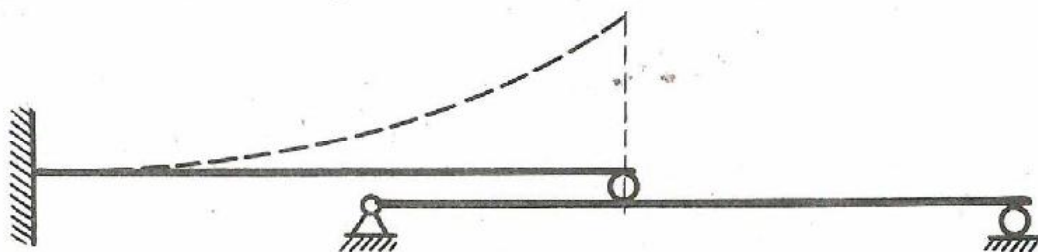
de aquí podremos despejar el valor de R que resulta:

$$R = \frac{F \cdot x^2 \frac{3L_1 - x}{6 EI}}{\frac{L^3}{3EI} + \frac{a^2}{3 EIL_2} (L_2 - a)^2}$$

por tanto, la ecuación de la elástica, es:

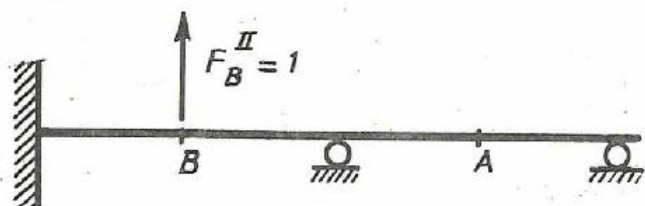
$$R = K \cdot x^2 (3L_1 - x)$$

que es una curva de tercer grado con tangente horizontal en el origen; por tanto, su representación gráfica será:



6-1. Determinación de la línea de influencia de un esfuerzo (momento flector, esfuerzo cortante o esfuerzo axial).

Este caso es análogo al de determinación de la Línea de Influencia de una reacción de apoyo.

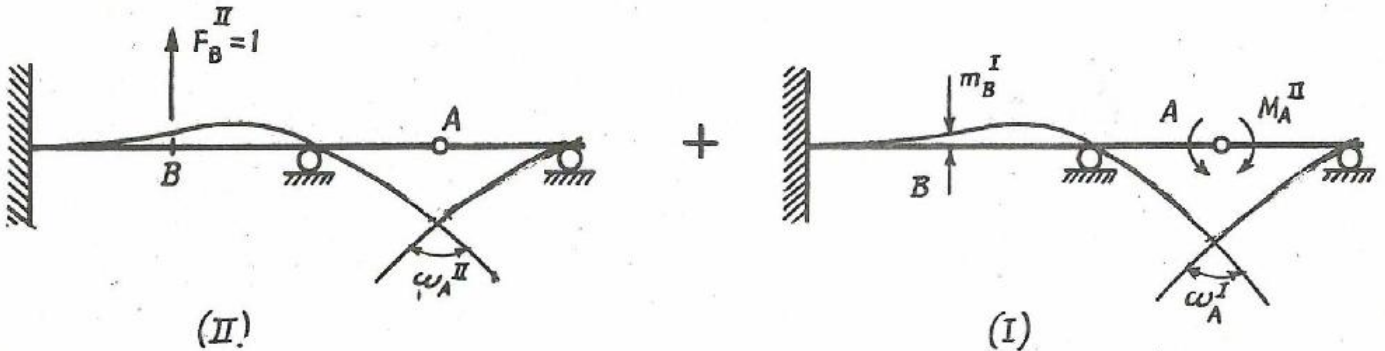


Para determinar, por ejemplo, la línea de influencia del momento flector, en la sección A, debido a la fuerza $F_B^{II} = 1$, estableceremos una articulación en A que permita el giro relativo de los bordes de la



ARTICULACIÓN EN "A"

sección y, entonces, el estado real (el de la figura adjunta) será suma de los dos estados siguientes:



En el estado I actúan como fuerza exterior un par de momentos M_A^{II} tales que produzcan un giro relativo de los bordes de la sección A que anule el giro correspondiente al estado (II). Es decir,

$$\omega_A^{\text{I}} + \omega_A^{\text{II}} = 0$$

El teoema de la reciprocidad para los estados (I) y (II) nos da:

$$F_B^{\text{II}} \cdot m_B^{\text{I}} = M_A^{\text{II}} \cdot \omega_A^{\text{II}} = - M_A^{\text{II}} \cdot \omega_A^{\text{I}}$$

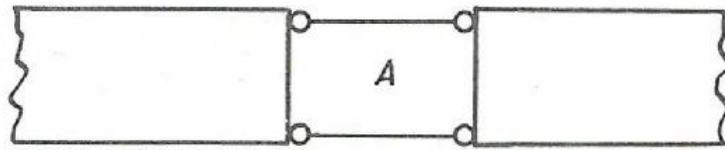
y

$$M_A^{\text{II}} = - \frac{m_B^{\text{I}}}{\omega_A^{\text{I}}}$$

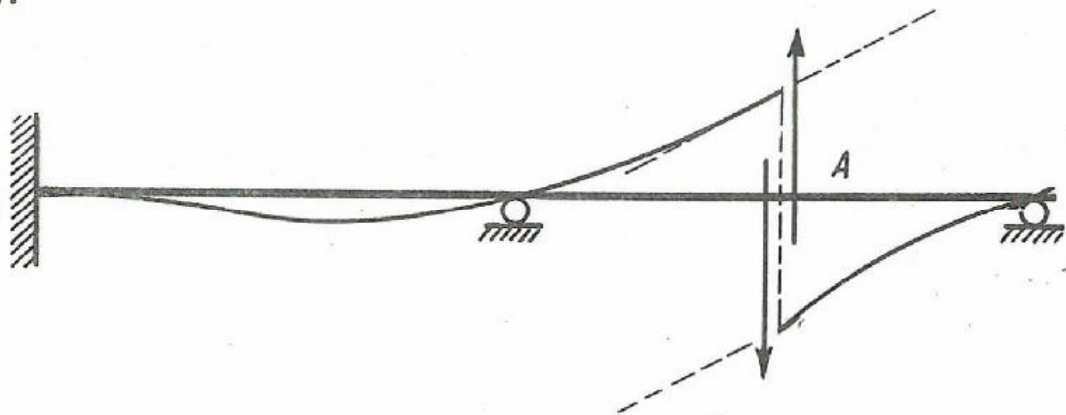
y, por un razonamiento idéntico al hecho en la determinación de la línea de influencia de una reacción de apoyo, se llega a que la elástica de la pieza con una articulación en A y con una pareja de momentos de valor cualquiera como fuerza exterior viene a ser una representación de la línea de influencia de momentos flectores en la sección A.

Si, continuando con el mismo ejemplo, en lugar de buscar la Línea de Influencia del momento flector quisiéramos conocer la línea de influencia del esfuerzo cortante en la misma sección A, sustituiríamos la articulación por un dispositivo que permita el corrimiento relativo de los bordes de la sección perpendicularmente a la directriz, pero que no permita el giro relativo.

Este dispositivo es el indicado en la figura.



Aplicando el teorema de la reciprocidad como en el caso anterior, podremos obtener la línea de influencia a partir de la elástica de la pieza sometida a un par de fuerzas aplicadas en la sección A (en la que supondremos colocado el mecanismo indicado).



En este caso las dos tangentes a la elástica, en la sección A que estamos considerando son paralelas.

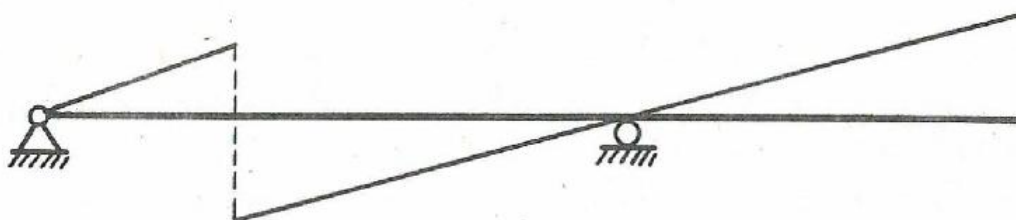
- Análogamente obtendríamos las línea de influencia para cor-
tantes y flectores por la acción de un momento unidad, como -
las derivadas de las curvas elásticas correspondientes.

-o-

17. Dibujar la línea de influencia del esfuerzo cortante y del mo-
mento flector en la sección C y en el apoyo B de la viga de
la figura; para la actuación de una fuerza vertical unidad.



Línea de influencia del esfuerzo cortante en C.

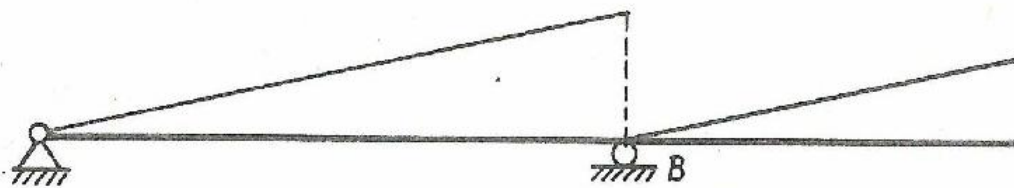


Línea de influencia del esfuerzo cortante en B. Como en B hay una reacción, y por tanto, una discontinuidad del cortante, tendremos dos líneas de influencia.

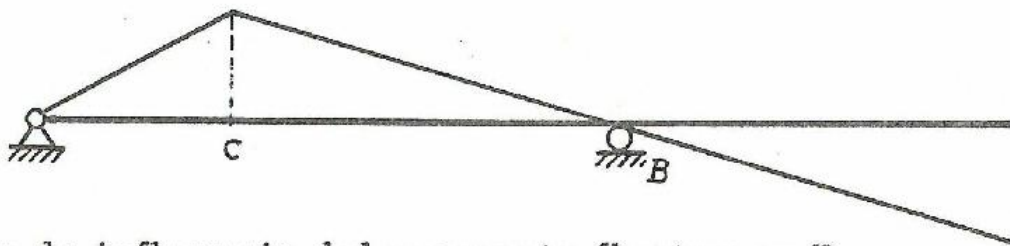
- Para el esfuerzo cortante a la derecha de B.



- Para el esfuerzo cortante a la izquierda de B.



Línea de influencia del momento flector en C.



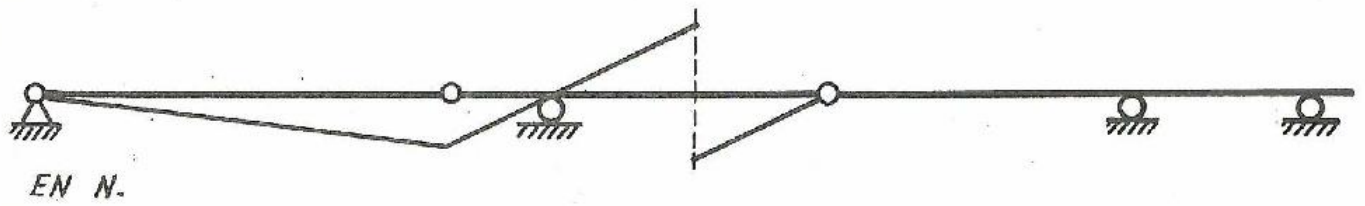
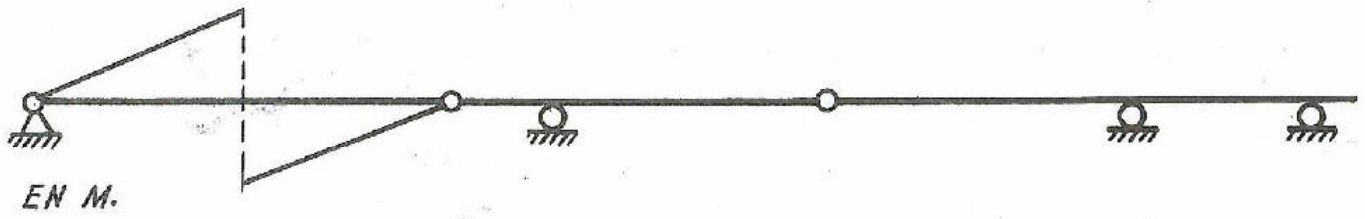
Línea de influencia del momento flector en B.



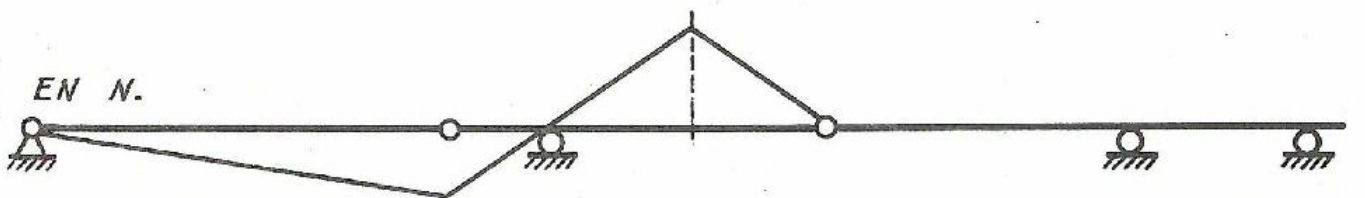
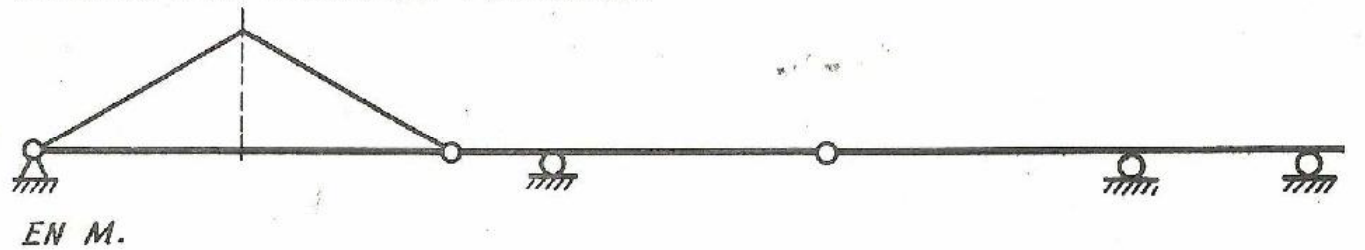
18. En la viga de la figura determinar las líneas de influencia del esfuerzo cortante y momento flector en los puntos M, N y S por la actuación de una fuerza vertical unidad.



LINEA DE I. DE ESFUERZOS CORTANTES.



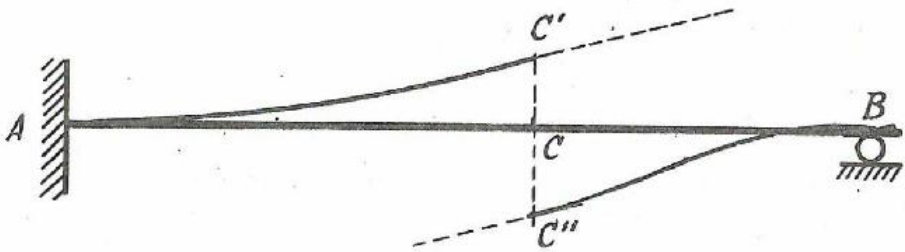
LINEA DE I. DE MOMENTOS FLECTORES.



19. Dibujar la línea de influencia del esfuerzo cortante y del momento flector en la rebanada C de la viga de la figura, para la actuación de una fuerza vertical unidad.

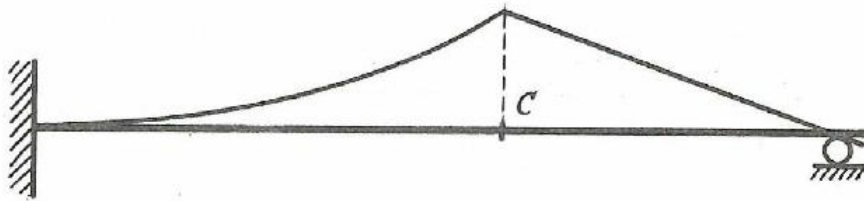


L. DE I. DEL ESFUERZO CORTANTE

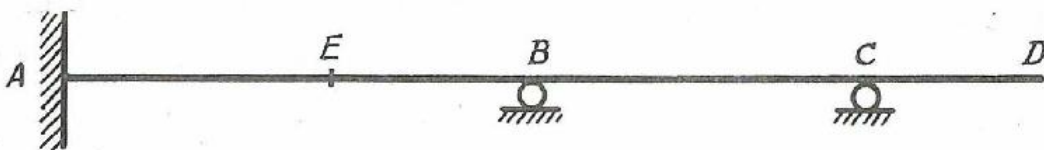


La tangente a la curva A C' en C' es paralela a la recta C''B.

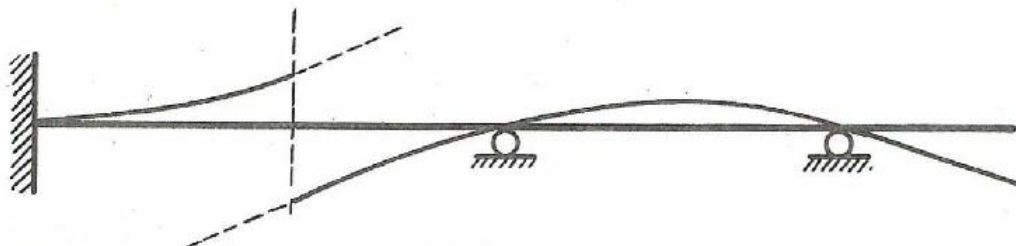
L. DE I. DEL MOMENTO FLECTOR.



20. Resolver el problema análogo al anterior para la sección E de la viga de la figura.



L. DE I. DEL ESFUERZO CORTANTE.



L. DE I. DEL MOMENTO FLECTOR.



21. - Determinar gráficamente la línea de influencia del momento flector y de la reacción en el apoyo B de la viga indicada en la figura, para la actuación de una carga vertical unidad.



L. DE DEL MOMENTO FLECTOR.

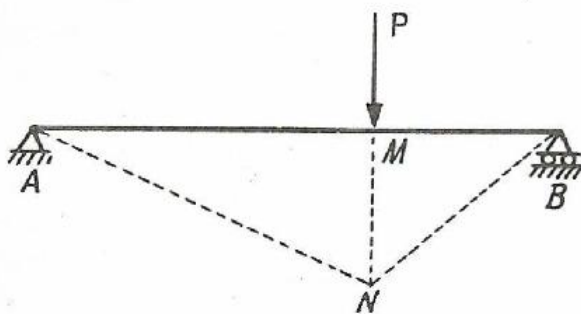


L. DE I. DE LA REACCIÓN EN "B".



6-2. Trenes de carga en vigas isostáticas.

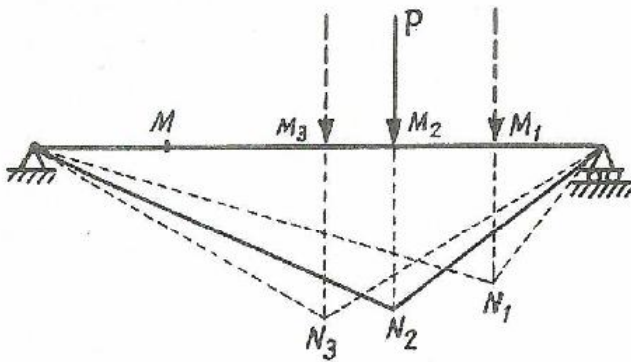
Sea la viga isostática de la figura y una carga P aplicada en punto M . Si la carga es fija, la ley de momentos flectores -



viene dada por la línea quebrada ANB y el momento máximo que se produce en la viga está situado en el punto M y su valor está dado por la magnitud MN .

Quando la carga es móvil la ley de momentos flectores adopta las formas 1, 2, 3... para las distintas posiciones de la carga 1, 2, 3..., y el máximo momento flector que puede aparecer en un punto M , corresponde al instante en que la posición de la carga es la de estar situada sobre ese punto.

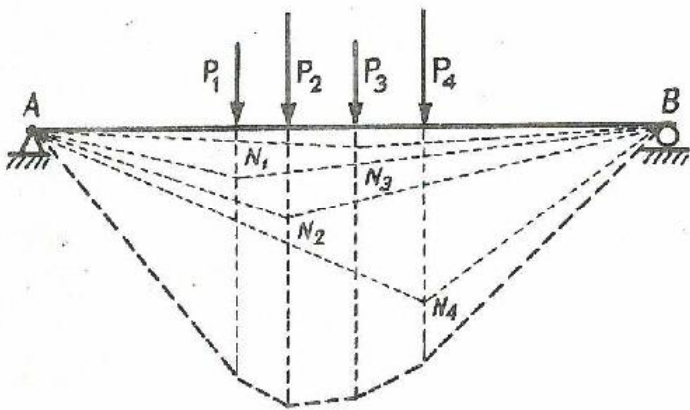
El máximo momento flector que se produce en toda la viga -



con la carga móvil P, está en el punto medio y vale:

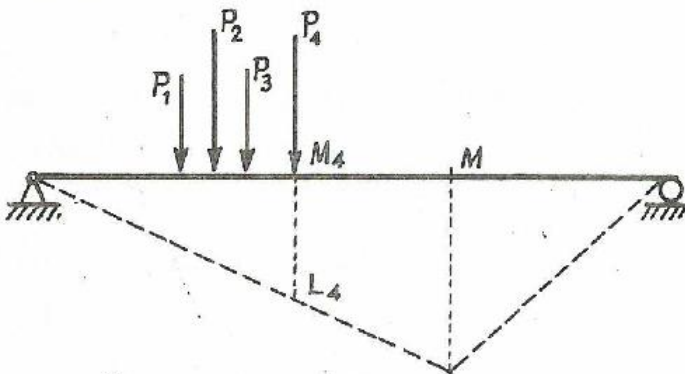
$$\frac{PL}{4}$$

Supongamos ahora un tren de varias cargas P_1, P_2, P_3, P_4 aplicadas sobre la viga isostática. Estudiemos el caso en que el tren está fijo.



Las leyes de M_f aisladas por cada carga vienen dadas por las líneas quebradas AN_1B, AN_2B , etc., y por superposición de efectos, la ley total de M_f vienen dadas por la suma de ordenadas de cada ley parcial, y el máximo absoluto N, coincide con la línea de acción de una de las cargas. (Cosa fácilmente demostrable extendiendo a la linealidad de las leyes parciales).

Posición del tren para la cual el M_f en un punto M es máximo.



Sea ALB la línea de influencia del M_f en M cuando una carga unidad se desplaza por la viga. El momento que en M produce la carga P_4 considerada aislada viene dado por:

$$P_4 \cdot (L_4 M_4)$$

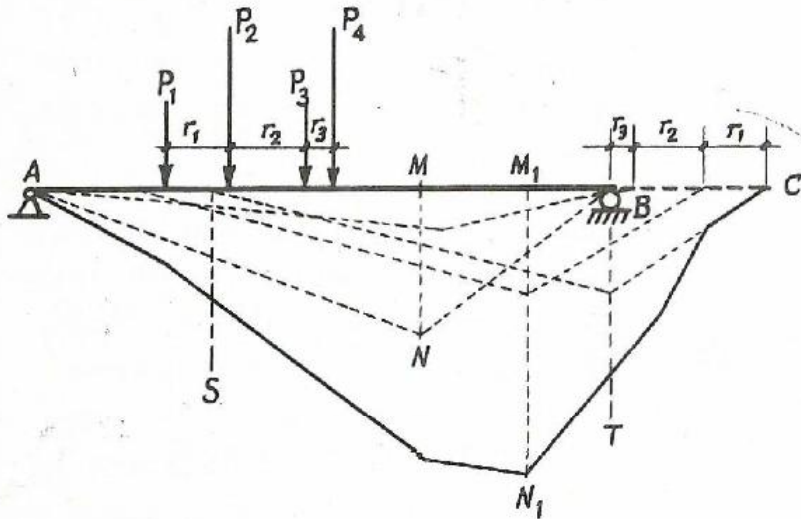
y análogamente los correspondientes a P_3, P_2, P_1 por expresiones similares:

$$P_3(L_3 M_3), P_2(L_2 M_2), \text{ etc. } \dots,$$

y el momento total debido a la superposición de efectos de todas las cargas será la suma:

$$M_{fB} = P_4(L_4 M_4) + P_3(M_3 L_3) + \dots + P_1(M_1 L_1)$$

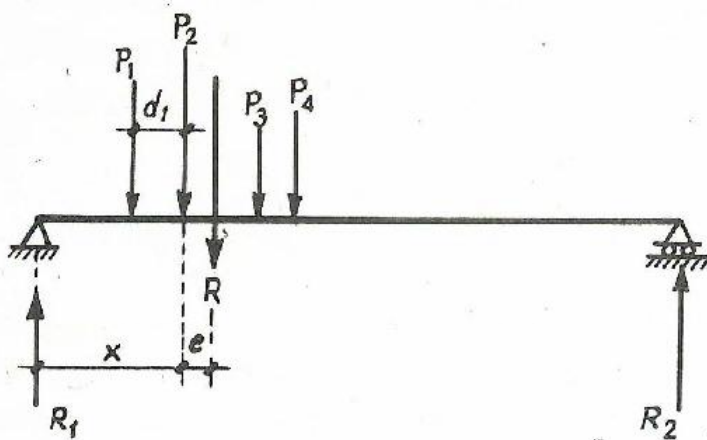
La posición del tren para la cual esta suma es máxima se calcula en la forma siguiente: Se disponen las líneas de influencia multiplicando sus ordenadas por cada P_i y desfasándolas, en sentido contrario al de avance de las fuerzas, en magnitudes r_i iguales a la separación entre estas (fig. adjunta) de forma que la ley ANB corresponda, por ejemplo, a la fuerza P_4 .



Se suman ordenadas y así se obtiene la quebrada AN_1C que nos determina el punto M_1 correspondiente al eje de P_4 , quedando así determinada la posición del tren que produce en el punto M el máximo momento flector, - cuyo valor viene dado por M_1N_1 .

Como todo el tren de cargas debe permanecer dentro de la viga, la quebrada es únicamente válida entre los puntos S y T ; - por tanto debemos determinar el máximo comprendido en dicho intervalo.

Otro problema surge en trenes de cargas: De las secciones que en cada instante ocupa la carga P_2 (ó P_i) ¿Cuál es la que tiene momento flector máximo?



Para estudiarlo sustituyamos las fuerzas por su resultante, y calculamos las reacciones R_1 y R_2 .

Tomemos momentos dorsales en el punto donde actúa P_2 .

$$M_2 = - [- R_1 x + P_1 d_1] \text{ pero } R_1 = \frac{R (L - x - e)}{L}$$

luego:

$$M_2 = \frac{R(L-x-e)}{L} x - P_1 d_1$$

Cuando M_2 es máximo

$$\frac{dM_2}{dx} = 0 ;$$

derivando y despejando:

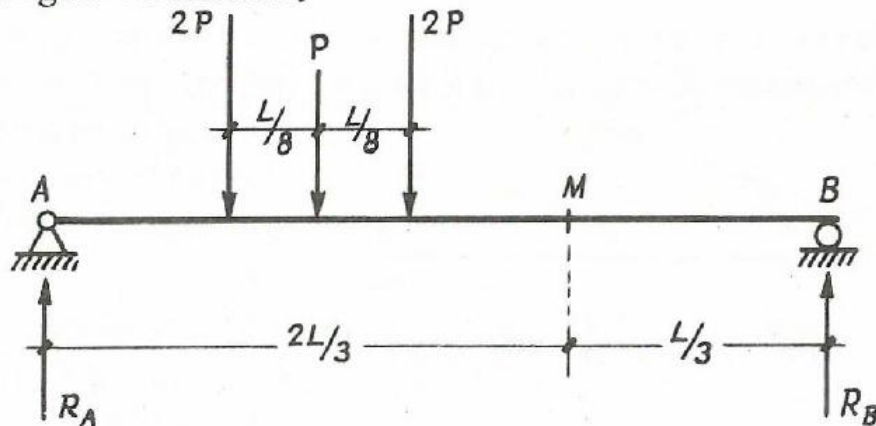
$$x = \frac{L - e}{2}$$

Es decir: el punto medio del segmento "e" coincide con el punto medio de la viga.

Máximo momento flector que se produce en la viga. - El máximo M_f coincidirá con el punto de aplicación de un eje. Por el procedimiento anterior calculamos los respectivos máximos - que se producen bajo los ejes de P_1, P_2, P_3, P_4 , y los puntos en los que están situados estos máximos. El mayor de todos - ellos, será el máximo M_f que se produce en la viga.

- 0 -

22. Determinar el momento flector máximo que se produce en la rebanada M de la viga de la figura por la actuación del tren de cargas indicado.



Como sabemos que el momento flector máximo en una rebanada se produce cuando una de las cargas está situada encima de ella, el procedimiento más rápido de resolución es tantear las tres posibilidades que tenemos en nuestro caso:

1 - Carga de la derecha, encima de M.

$$R_B \cdot L = 5P \cdot \frac{13L}{24} ; R_B = \frac{65 P}{24}$$

$$\left(\uparrow \right) M_{fM} = R_B \cdot \frac{L}{3} = \frac{65 PL}{72}$$

2- Carga del centro encima de M.

$$R_B \cdot L = 5P \cdot \frac{2L}{3} ; R_B = \frac{10 P}{3}$$

$$M_{fM} = R_B \cdot \frac{L}{3} - 2P \cdot \frac{L}{8} = \frac{62 PL}{72}$$

3 - Carga de la izquierda encima de M.

$$R_A \cdot L = 5P \cdot \frac{5L}{24} ; R_A = \frac{25 P}{24}$$

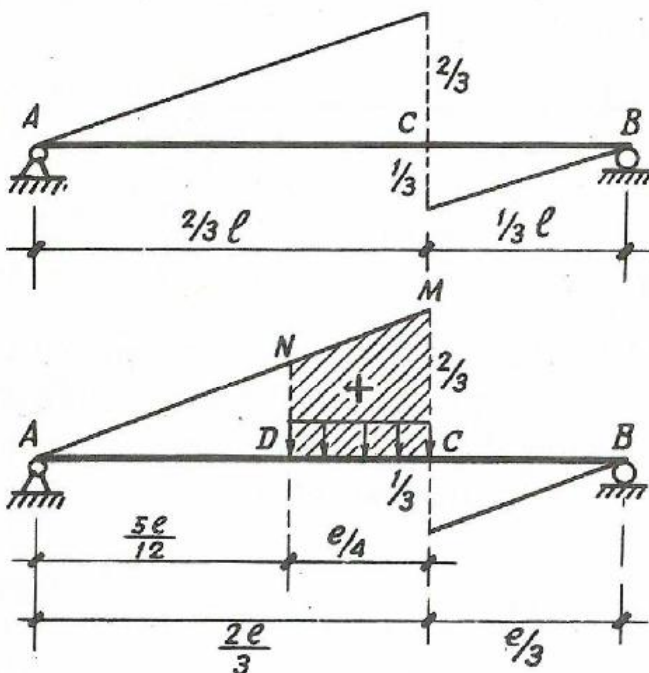
$$M_{fM} = R_A \cdot \frac{2L}{3} = \frac{50 PL}{72}$$

Luego el máximo momento flector se produce cuando la carga de la derecha está situada encima de M y su valor es

$$\frac{65 PL}{72}$$

-0-

23. Determinar el máximo esfuerzo cortante que se produce en la rebanada C de la viga de la figura, por la actuación de -



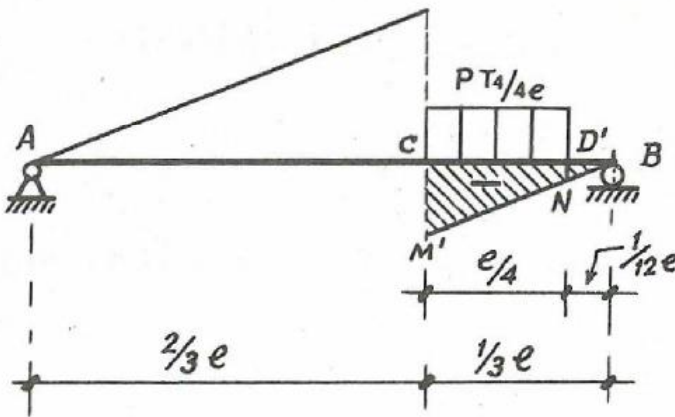
una sobrecarga uniforme p de longitud $L/4$ que se desplaza libremente por la viga.

Sabemos que la línea de influencia del Q en C es la de la figura.

Para una carga P uniformemente distribuida en $l/4 = DC$ el cortante vale el área $DNMC \times P$

$$DN = \frac{MC}{AC} \cdot AD = \frac{2/3}{2/3 l} \cdot \frac{5}{12} l = \frac{5}{12}$$

$$P_x \text{ Area DNMC} = \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} + \frac{5}{12} \right] P = \frac{13 Pl}{96}$$



Si la carga está en CD' el cortante es:

$$P_x \text{ área CD'N'M'}$$

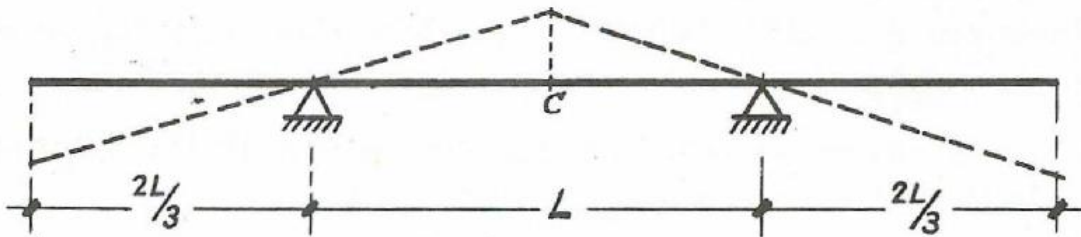
$$D'N' = \frac{CM'}{CB} \cdot BD' = \frac{1}{12}$$

$$Q = - P \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right] = -$$

$$= - \frac{5}{96} Pl$$

Como vemos la posición más desfavorable es cuando la carga está situada en el tramo CD. Cualquier otra posición produce un cortante menor, ya que las áreas situadas por debajo del eje de la viga son negativas.

24. Determinar el máximo momento flector que se produce en la sección central de la viga indicada en la figura sometida a una sobrecarga uniforme P, que puede variar a lo largo de la viga, tanto en longitud como en posición.



La línea de influencia correspondiente al momento flector en la sección central es la indicada en la figura.

- El máximo M_f positivo se produce cuando esté cargado el tramo central.



$$\left(\square \right) M_{f_c} = \frac{pL^2}{8}$$

- El máximo momento flector negativo se produce cuando están cargados totalmente los dos voladizos.

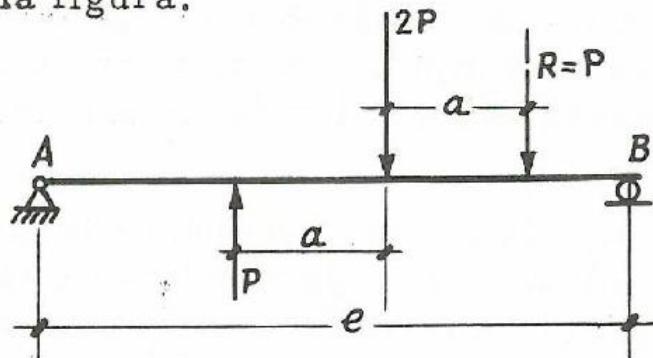


$$\left(\Downarrow \right) M_{f_c} = \frac{P}{2} \left(\frac{2L}{3} \right)^2 = \frac{2PL^2}{9}$$

Por tanto, el máximo momento se produce en este caso, siendo negativo y de valor

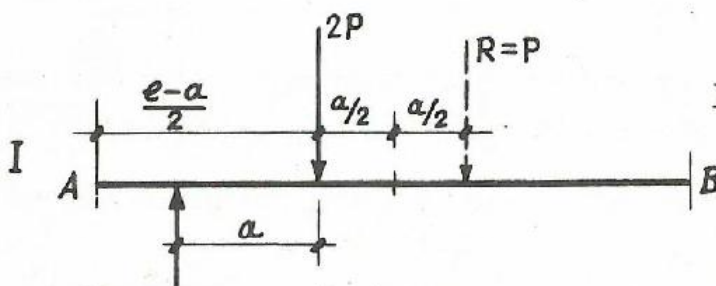
$$\frac{2 PL^2}{9}$$

25. Determinar el momento flector máximo absoluto en la viga indicada en la figura.



Para el sistema de cargas dado, la resultante (de puntos) está a distancia \underline{a} de $2P$. Sabemos que los máximos M_f se producen en las rebanadas donde están aplicadas las cargas.

Para cada carga es máximo cuando es simétrica respecto al centro de la pieza con la resultante.



I- Para la carga $2P$:

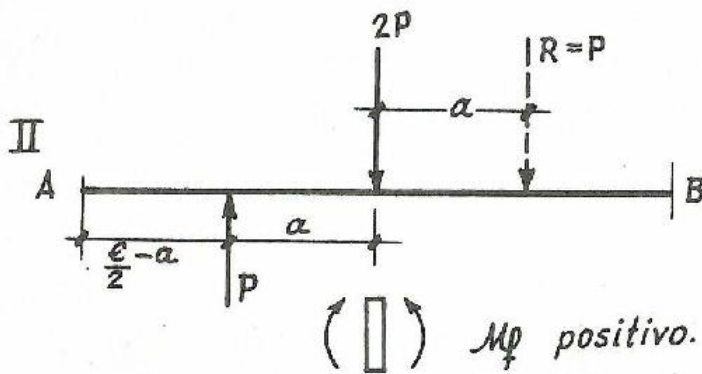
Estará aplicada a $\frac{1}{2} (l-x)$ de A.

El M_f en esa rebanada, vale

$$M_f = +P \frac{(l-a)^2}{4l}$$

II - Para la carga P .

Estará aplicada a $(\frac{l}{2} - a)$ de A.

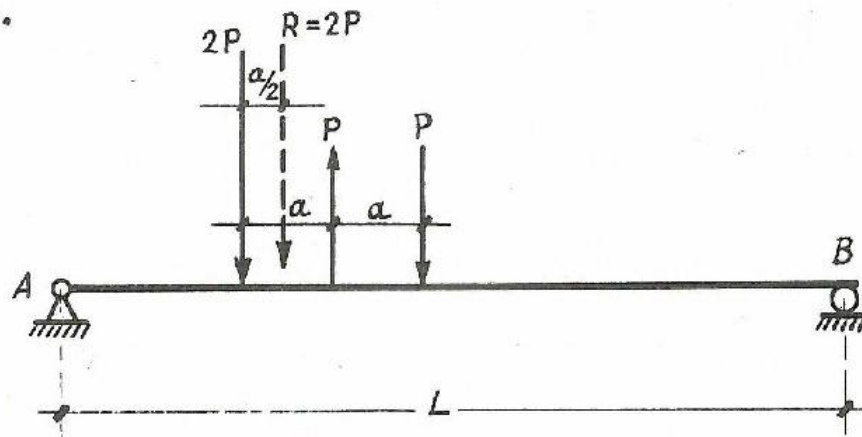


El M_f en esa rebanada vale:

$$M_f = -\frac{P}{4l} (l - 2a)^2$$

Vemos que la posición más desfavorable del tren de cargas es la I.

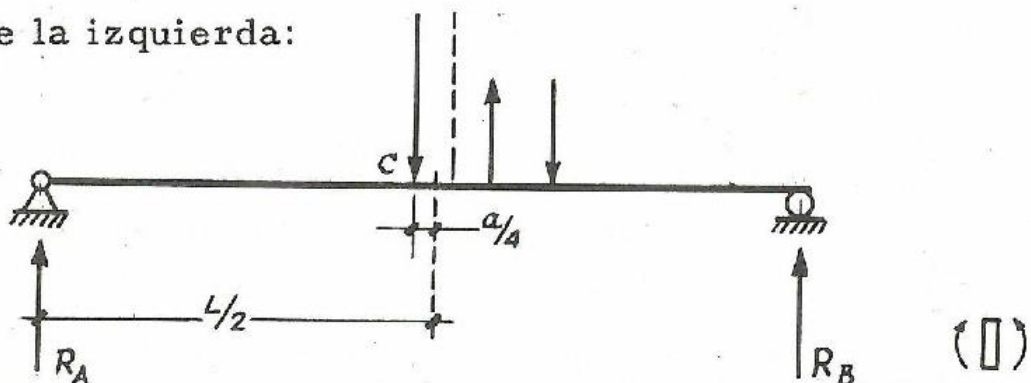
26. Determinar el momento flector máximo absoluto que se produce por la acción del tren de cargas de la viga indicada en la figura.



La resultante del conjunto de fuerzas vale $2P$ y está situada a una distancia $a/2$ de la carga izquierda.

Para determinar el M_f máximo absoluto de la viga determinamos cuales son los momentos máximos que se producen debajo de cada carga y a qué rebanada corresponden; el máximo de ellas será el máximo absoluto.

- 1- Carga de la izquierda:

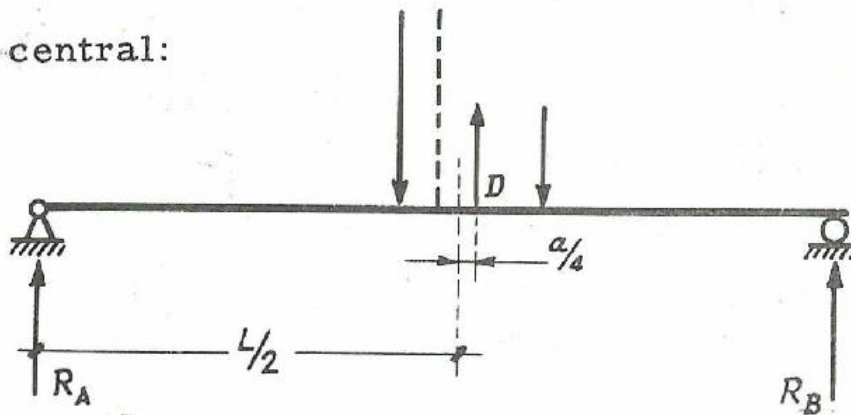


$$R_A \cdot L = 2P \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{4} \right)$$

$$R_A = \frac{P}{2L} (2L - a)$$

$$M_{f_c} = R_A \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{4} \right) = \frac{P}{8L} (2L-a)^2$$

2- Carga central:

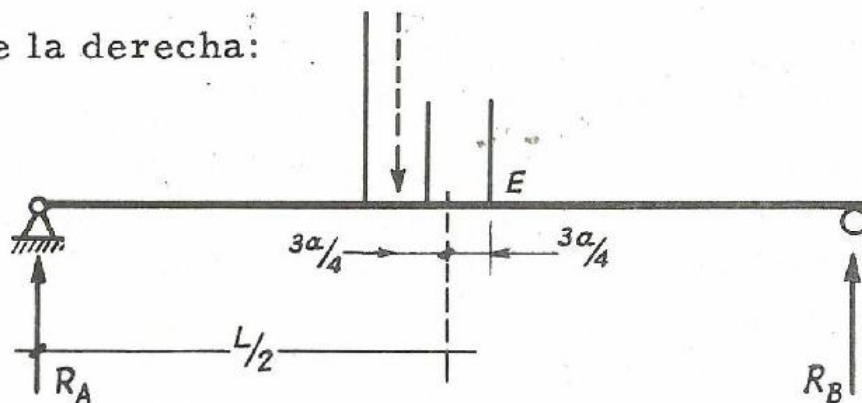


$$R_B \cdot L = 2P \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{4} \right)$$

$$R_B = \frac{P}{2L} (2L - a)$$

$$M_{f_D} = R_B \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{4} \right) - Pa = \frac{P}{8L} (2L-a)^2 - Pa$$

3- Carga de la derecha:



$$R_B \cdot L = 2P \left(\frac{L}{2} - \frac{3a}{4} \right)$$

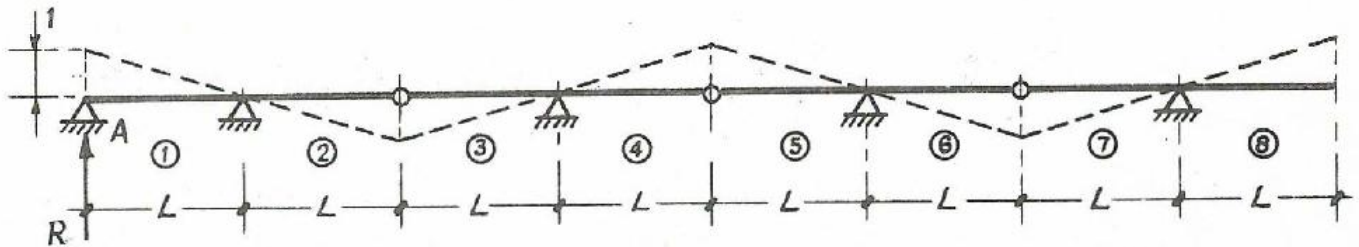
$$R_B = \frac{P}{2L} (2L - 3a)$$

$$M_{f_E} = R_B \left(\frac{L}{2} - \frac{3a}{4} \right) = \frac{P}{8L} (2L - 3a)^2$$

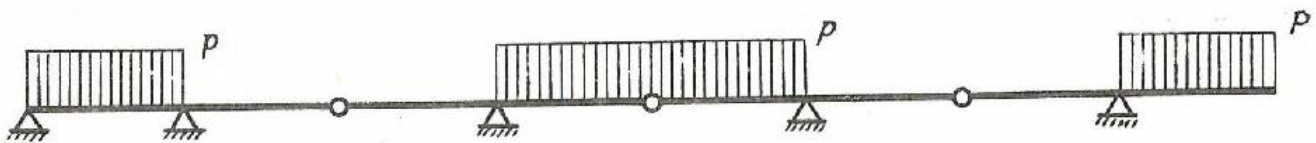
luego el máximo momento flector se produce en la rebanada C y tiene un valor:

$$M_{f_{\text{máx.}}} = \frac{P}{8L} (2L - a)^2$$

27. Determinar la reacción máxima que se produce en el apoyo A de la viga indicada en la figura por la actuación de una sobrecarga uniforme P variable a lo largo de la viga tanto en posición como en longitud.



- La línea de influencia de la reacción en A, es la línea indicada de puntos de la figura. La ordenada de esta línea tiene el valor 1 en A porque cuando la fuerza unitaria está encima del apoyo A la reacción es 1.
- La máxima reacción positiva se produce cuando están cargados los tramos (1), (4), (5) y (8).



$$R = p(S_1 + S_4 + S_5 + S_8)$$

Siendo S_i el área comprendida entre la línea de influencia y la viga en el tramo i.

En nuestro caso:

$$S_1 = S_4 = S_5 = S_8 = \frac{L}{2}$$

Por tanto,

$$R = p \cdot \frac{4L}{2} = 2 pL.$$

- La máxima reacción negativa se produce cuando estén cargados los tramos (2), (3), (6) y (7).



$$R = - p [S_2 + S_3 + S_6 + S_7]$$

$$S_2 = S_3 = S_6 = S_7 = \frac{L}{2}$$

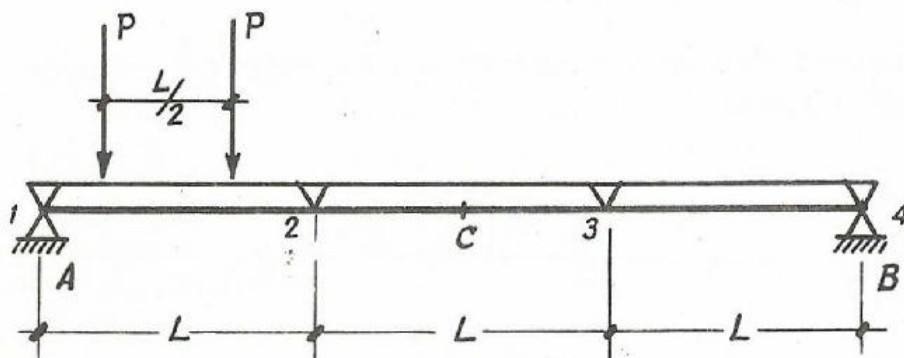
$$R = - 2 pL$$

Por tanto, la reacción máxima vale $2pL$ y se produce tanto en sentido positivo como negativo.

- Es interesante observar el procedimiento rapidísimo que prestan las líneas de influencia en determinados casos, en el cálculo de las reacciones.

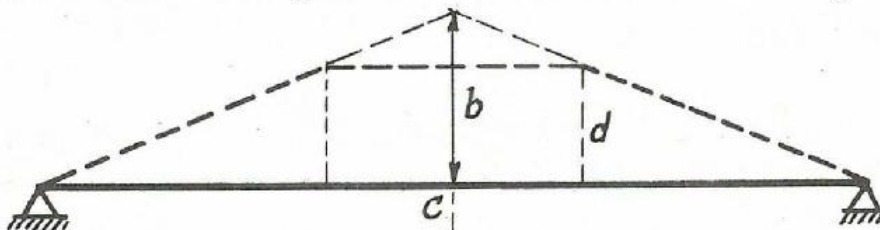
- o -

28. Determinar el máximo momento flector en la rebanada central de la viga indicada en la figura para el tren de cargas dado.



La viga AB recibe las cargas a través de los apoyos 1, 2, 3, 4 sobre los que apoyan las viguetas 1-2, 2-3, 3-4.

La línea de influencia del momento flector en C debida a una carga vertical unitaria que se mueve sobre las viguetas es:



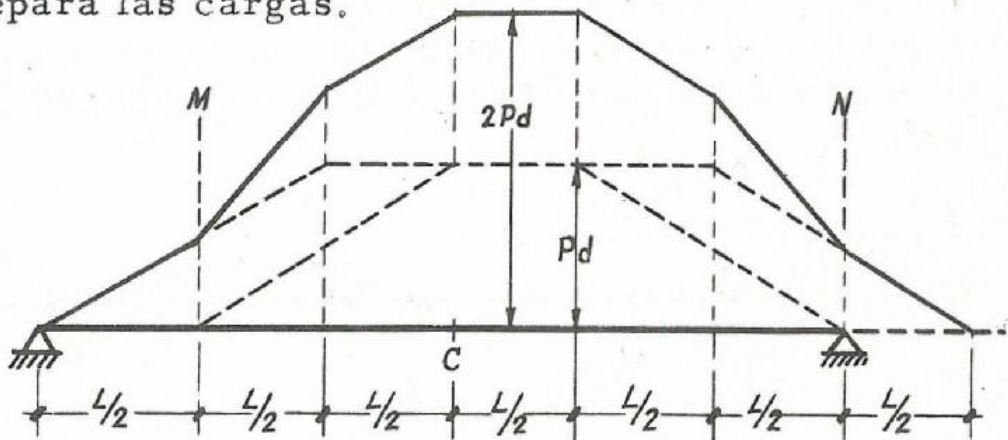
siendo $d = \frac{2}{3} b$.

b es el M_f que se produce en el centro de la viga AB, cuando la carga unitaria está en dicho punto.

$$b = \frac{3L}{4} \quad ; \quad d = \frac{2}{3} \frac{3L}{4} = \frac{L}{2}$$

Según el procedimiento indicado anteriormente multiplicamos

las ordenadas de la línea de influencia P y sumamos la línea resultante y la igual a ella obtenida desplazándola, la distancia $L/2$ que separa las cargas.



La curva obtenida está referida a la posición de la carga derecha, como el tren de cargas no puede salirse de la viga AB, la curva es únicamente válida entre los puntos M y N.

El máximo momento se obtiene cuando la carga de la derecha está en cualquier punto del tramo derecho de la vigueta central; es decir, cuando el tren de cargas está en cualquier posición dentro de dicha vigueta.

Su valor es:

$$M_{f_c} = 2Pd = P \cdot L$$

Si no hubiéramos puestos las viguetas el máximo momento en dicho punto sería:

$$M_{f_c} = \frac{5 PL}{4} = 1,25 PL.$$

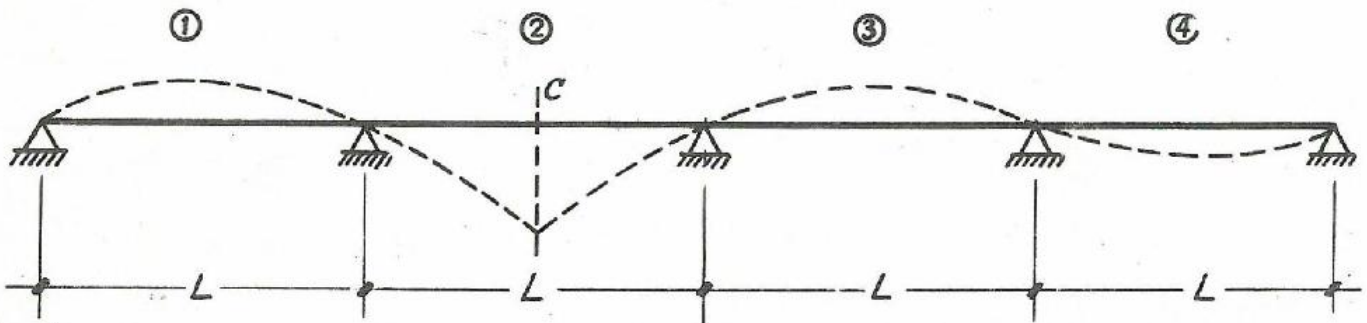
Los problemas relativos a cargas móviles en vigas hiperestáticas, se abordan de idéntica manera; teniendo en cuenta que no se prestan a cálculos tan simplificados como en vigas isostáticas debido a que las líneas de influencia no son rectas como en las vigas isostáticas.

Por tanto, el problema de cargas móviles en hiperestáticas se reduce a calcular la expresión matemática de dichas líneas de influencia. No obstante existen muchos problemas en los que el conocimiento de la forma de dicha línea es suficiente para re-

resolverlos.

-0-

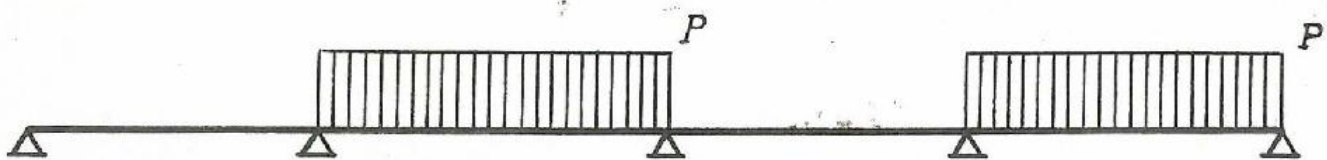
29. Calcular el máximo momento flector que aparece en el centro del tramo 2 por la acción de una sobrecarga uniforme p variable a lo largo de la viga tanto en posición como en longitud.



La línea de influencia es la indicada de puntos en la figura.

- El máximo momento flector positivo se produce cuando estén cargados los tramos (2), (4).

Tomamos como M_f positivo ()



- El máximo momento flector negativo se produce cuando están cargados los tramos (1), (3).



- Una vez conocidos los casos más desfavorables de carga, resolviéndolos por el teorema de los 3 momentos podríamos determinar cuál es el mayor momento que se produce en C.

En este caso el conocimiento de la forma de la línea de influencia nos permite determinar la posición más desfavorable de las cargas.

En este caso podemos calcular los momentos utilizando el ába

co de la línea de influencia de la pág. 53 de la publicación número 100.

- M_f positivo:

$$\left(\uparrow \downarrow \right) M_{f_c} = (0,0736 + 0,0053) pL^2 = 0,0789 pL^2.$$

- M_f negativo:

$$\left(\downarrow \uparrow \right) M_{f_c} = (0,0245 + 0,0197) pL^2 = 0,0442 pL^2$$

Por tanto, el momento flector máximo es positivo y vale:

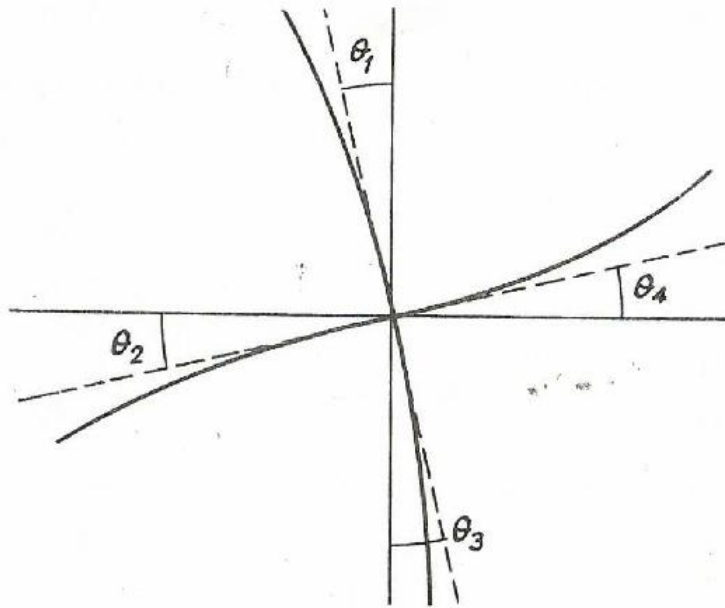
$$0,0789 pL^2$$

7-1. - PORTICOS

-o-

7-1. - PORTICOS. - En el cálculo de pórticos tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:

- 1^a. Los acortamientos o alargamientos de las barras por la acción del esfuerzo axial son despreciables.
- 2^a. Los ángulos formados por las directrices de las barras rígidamente empotradas en un nudo son invariables. Con esta hipótesis si el nudo experimenta un giro por efecto --



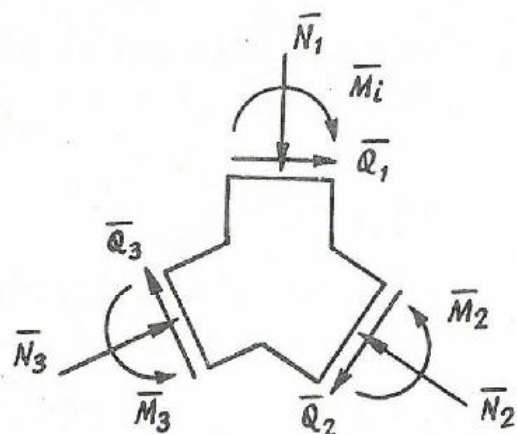
de las cargas aplicadas a la estructura, los ángulos θ_1 θ_2 θ_3 θ_4 , serán iguales.

- 3^a. Cualquier parte de la estructura sometida a las fuerzas que actúan directamente sobre ella y a la reacción del resto de la estructura, se encuentra en equilibrio. Por tanto en cada nudo tendremos:

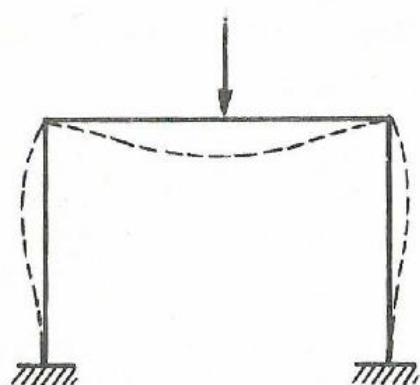
$$\Sigma \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \bar{F} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3 = 0$$

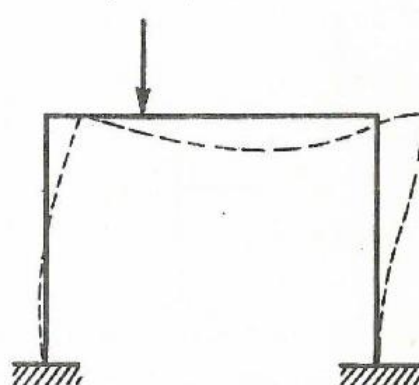
- 4^a. Los nudos de una estructura según sea ésta y según sea



El tipo de cargas aplicadas, pueden sufrir durante el proceso de deformación de la estructura, un giro alrededor de sí mismas, o bien un giro y una traslación. En el primer caso la estructura se denomina de nudos intraslacionales y en el segundo, estructura de nudos traslacionales.



INTRASLACIONAL

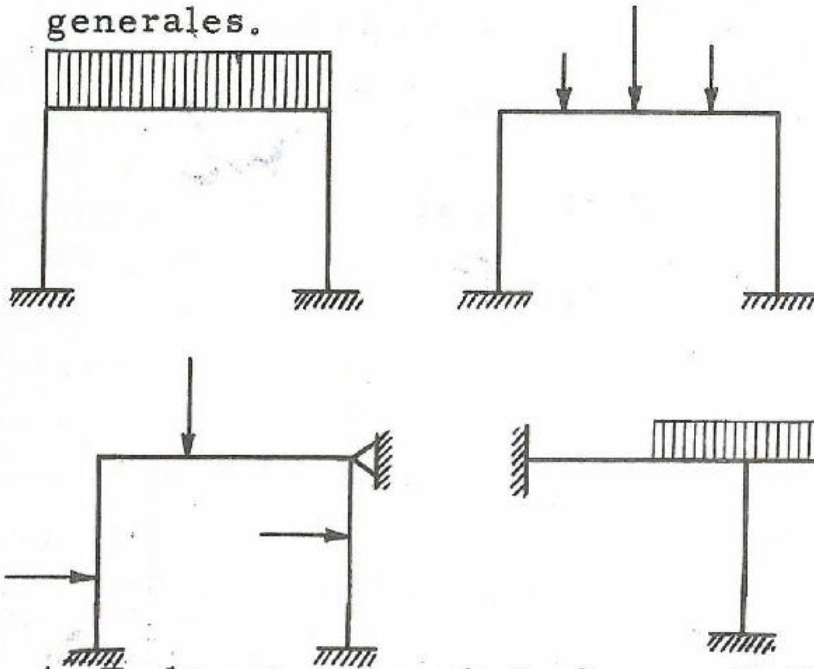


TRASLACIONAL

Las estructuras de nudos intraslacionales se resuelven fácilmente mediante el siguiente esquema: los ángulos ϑ_i que giran las directrices de cada barra como consecuencia de las cargas exteriores aplicadas en ella y de las reacciones del resto de la pieza, son función únicamente de dichas cargas y de los momentos de reacción, por tanto, si el número de barras que coinciden en un nudo es \underline{n} , podemos establecer $(n-1)$ ecuaciones independientes de igualdad de ángulos, que junto con la ecuación (1) de equilibrio de momentos, nos proporcionan \underline{n} ecuaciones. Expresando estas \underline{n} ecuaciones para todos los nudos obtenemos un sistema compatible que nos permite calcular todos los momentos de empotramiento de las barras (Véase ejemplos).

En las estructuras traslacionales los giros y traslaciones de los nudos no son función únicamente de las cargas exteriores y de los momentos de reacción, por esto tenemos un mayor número de incógnitas; a su vez disponemos de las condiciones impuestas por las traslaciones, con lo que obtendremos un nuevo sistema compatible que nos permitirá resolver la estructura. - (véase ejemplos).

Es necesario, pues, un criterio que nos permita saber si una estructura es o no intraslacional. Daremos algunas reglas generales.



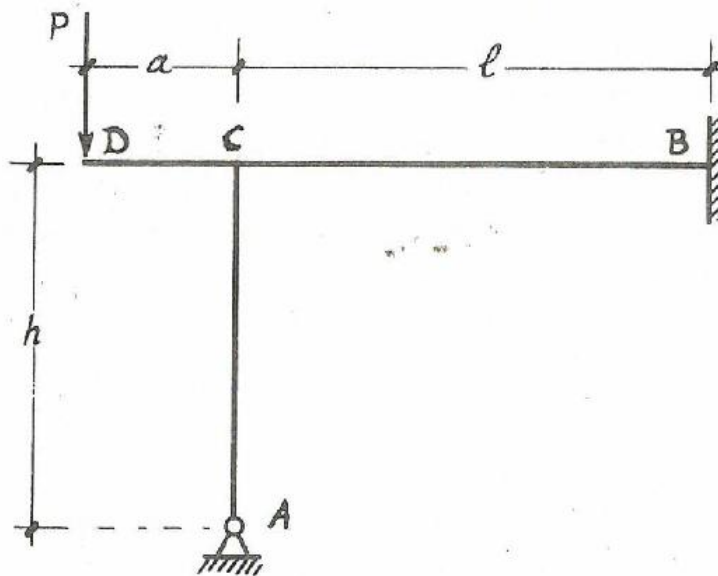
Intraslacionales

- Pórticos simétricos con cargas simétricas.
- Pórticos cualesquiera con cargas cualesquiera coaccionados lateralmente.

Traslacionales

- Los no indicados en las reglas anteriores.

1. En la estructura de la figura. Hallar reacciones y leyes de M_f , Q , N .



Dibujamos la deformación a estima y ponemos las reacciones según el tipo de coacción.

De la observación de la deformada, obtenemos:

En B giro nulo $\rightarrow M_f$

En A giro libre $\rightarrow M_f = 0$

En C giro del dintel, es el mismo que el giro del soporte.

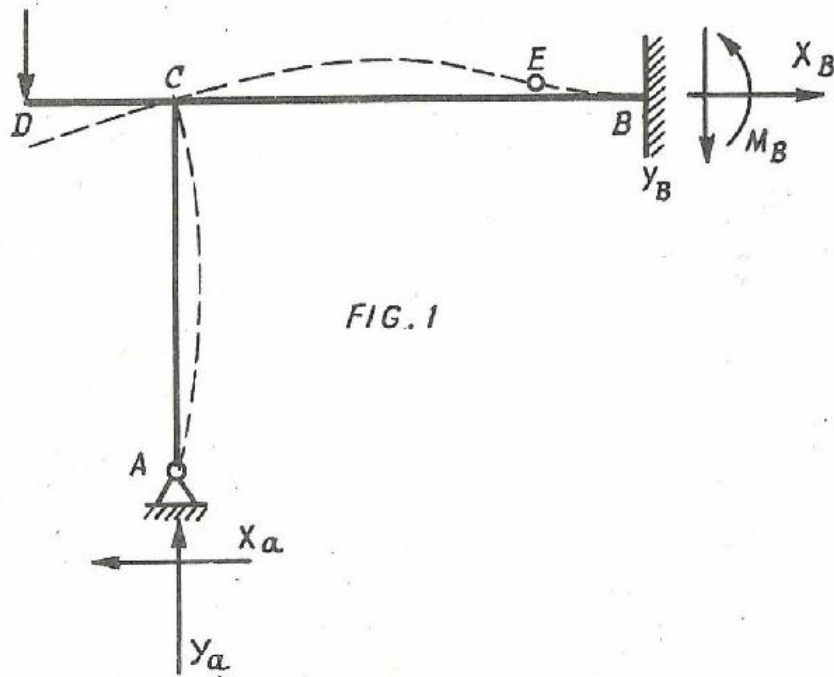


FIG. 1

Coacciones externas $\rightarrow 5 \rightarrow$ luego hay 2 hiperestáticas. -Vamos a considerar a estas como X_B e Y_B .

De la estática.

$$Y_A - Y_B = P; \quad X_A = X_B; \quad \text{P. a } -X_B h - Y_B l + M_A = 0$$

Impongamos la condición de que el giro en C sea igual en el soporte que en el dintel.



FIG. 2



FIG. 3

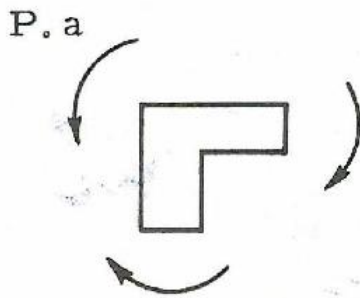
$$\vartheta_C = \frac{M_1 l}{3 EI} - \frac{M_1}{2} \cdot \frac{l}{6 EI} = \frac{M_1 l}{4 EI}$$

$$\vartheta_C = \frac{M_2 h}{3 EI}$$

$$\frac{M_2 h}{3 EI} = \frac{M_1 l}{4 EI};$$

$$\frac{M_2 h}{3} = \frac{M_1 l}{4}$$

Equilibrio del nudo:



$$Pa = M_1 + M_2 = M_1 + M_1 \frac{3l}{4h} = M_1 \left(1 + \frac{3l}{4h}\right)$$

$$M_1 = \frac{Pa}{1 + \frac{3l}{4h}};$$

$$M_2 = \frac{Pa}{1 + \frac{4h}{3l}}$$

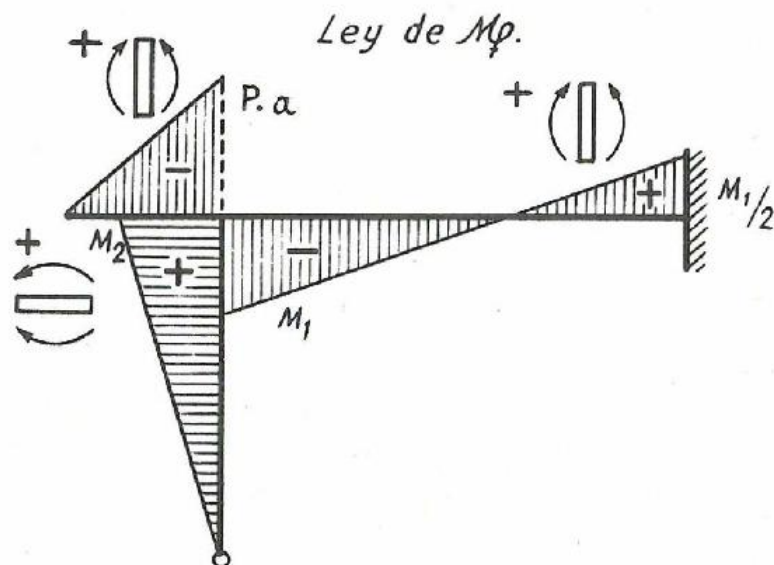
$$M_B = \frac{M_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{Pa}{1 + \frac{3l}{4h}}$$

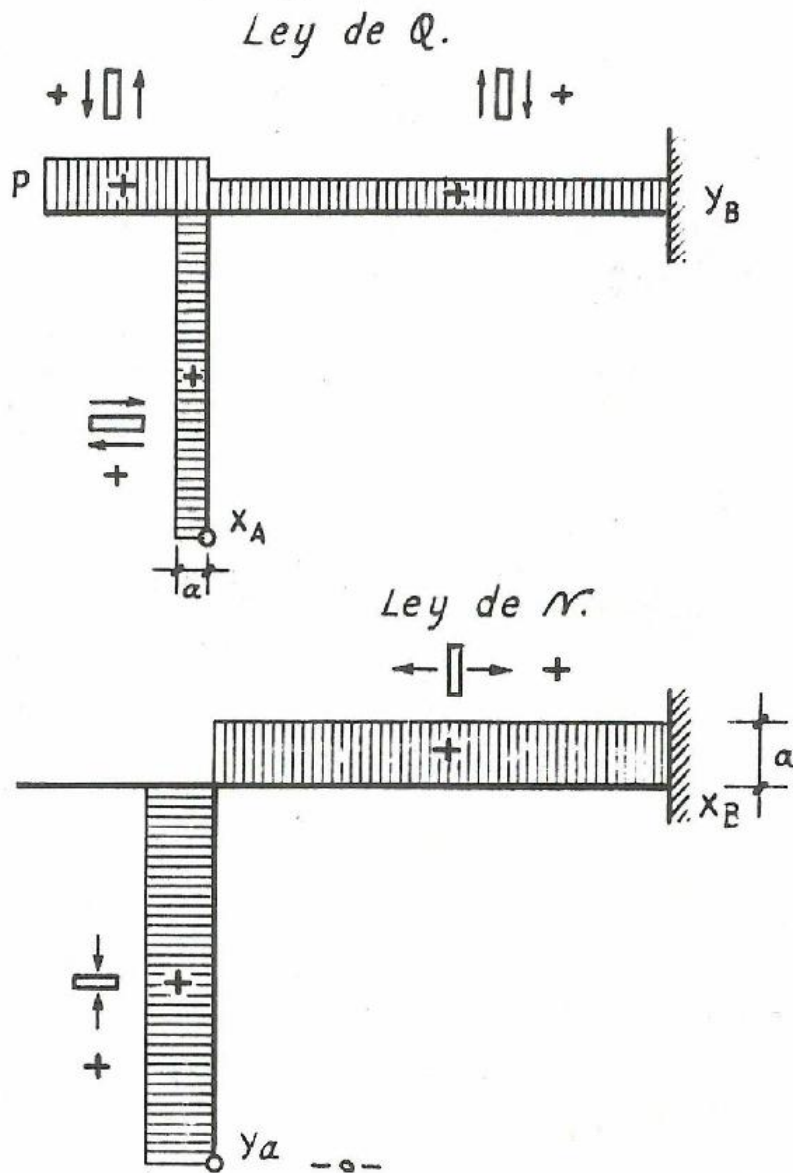
Reacciones. Del equilibrio del soporte (fig. 3).

$$X a h = M_2 \rightarrow X_A = X_B = \frac{Pa}{h \left(1 + \frac{4h}{3l}\right)}$$

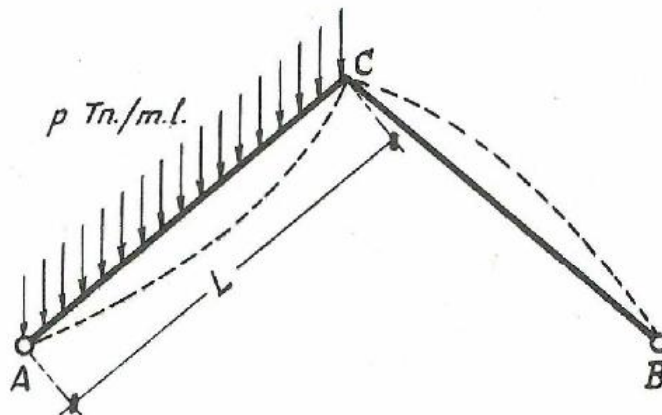
Del dintel (fig. 2).

$$M_1 + \frac{M_1}{2} = Y_B \cdot l \rightarrow Y_B = \frac{3 Pa}{2 l \left(1 + \frac{3l}{4h}\right)}; \quad Y_a = P - Y_B$$





2. Determinar la ley de momentos flectores en el pórtico de la figura adjunta.



El pórtico puede representarse según la fig. 2.

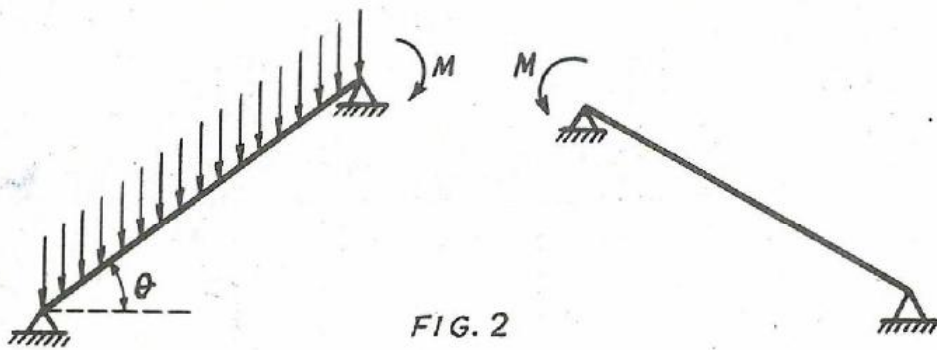


FIG. 2

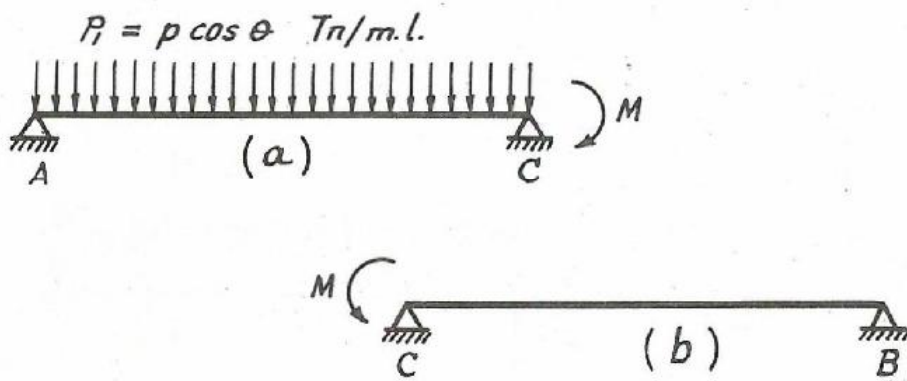


FIG. 3.

A su vez las dos piezas de la fig. 2 podemos representarlas según la fig. 3 debido a la posibilidad de despreciar el acortamiento producido por el esfuerzo axial (proyección de las cargas P según la directriz).

Igualando los giros en C:

Giro en C debido al momento $M \rightarrow \varphi_1 = -\frac{1}{EI} \frac{ML}{3}$ (fig. 3-b)

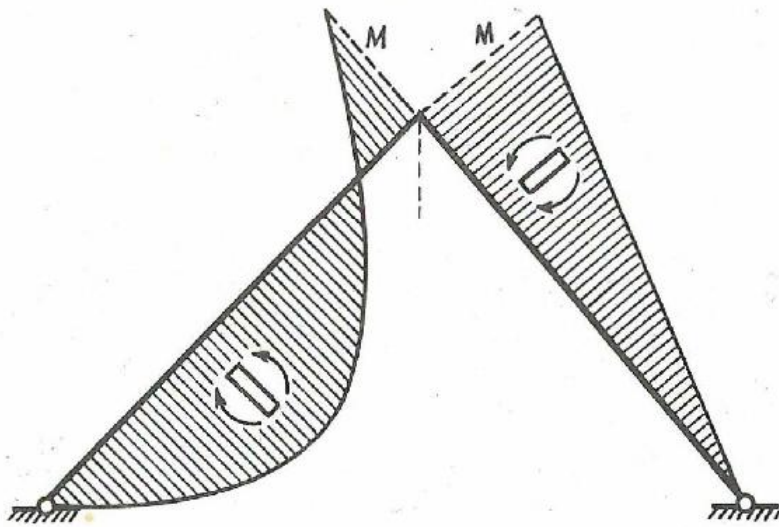
Giro en C debido a la carga y al momento $\varphi_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{ML}{3} - \frac{2}{3} \frac{P_1 L^2}{8} \cdot \frac{L}{2} \right]$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

operando:

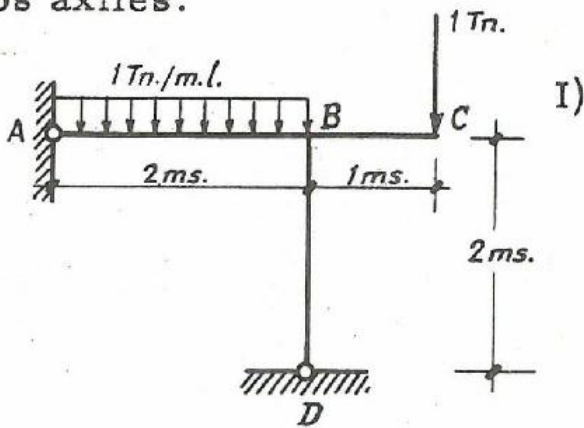
$$M = \frac{P_1 L^2}{16}$$

La ley de momentos flectores es:



3. Calcular las reacciones y dibujar las leyes de momentos flectores y cortantes en la estructura adjunta.

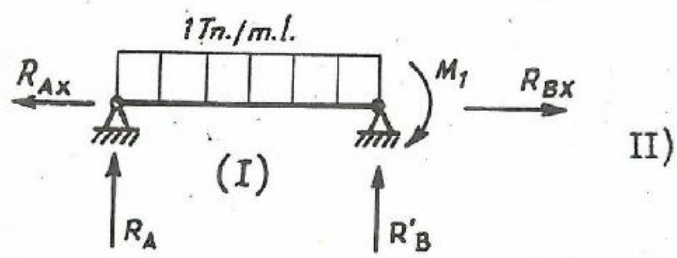
Hacemos la descomposición que indican las figuras adjuntas y estudiamos cada viga en particular, prescindiendo de esfuerzos axiales:



$$\left. \begin{aligned} R'_B \cdot 2 - 1 \times 2 \times 1 - M_1 &= 0 \\ -R'_A \cdot 2 + 1 \times 2 \times 1 - M_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

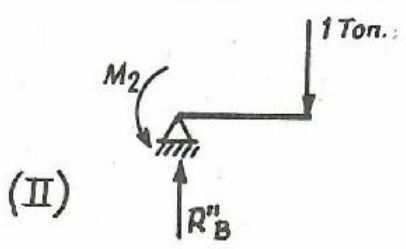
$$R'_A = - \left[\frac{M_1 - 2}{2} \right]$$

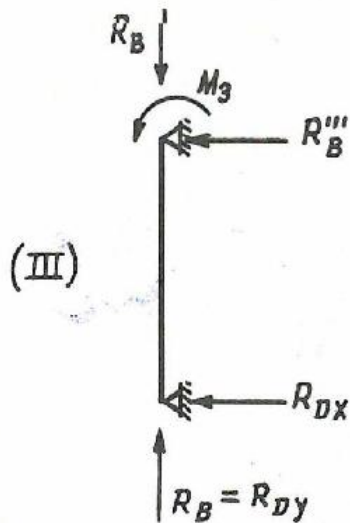
$$R'_B = \frac{M_1 + 2}{2}$$



$$R''_B = 1 \text{ Tn.}$$

$$M_2 = 1, \text{ m. Tn.}$$





III)

$$+ R_B''' \times 2 + M_3 = 0$$

$$- R_{Dx} \times 2 + M_3 = 0$$

$$R_B''' = - M_3 / 2$$

$$R_{Dx} = M_3 / 2$$

Ahora hallemos el giro del extremo B en las vigas (I) y (III).

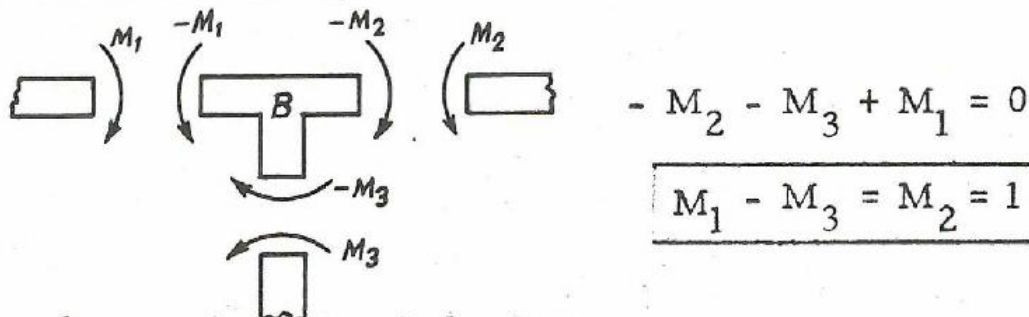
$$(I) \quad \omega_B = \frac{1 \times 2^3}{24 EI} - \frac{M_1^2}{3 EI} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2 M_1}{3} \right) \frac{1}{EI} = \frac{1 - 2 M_1}{3 EI}$$

$$(III) \quad \omega_B = \frac{M_3}{3 EI}$$

Igualando los giros, tenemos la ecuación:

$$\frac{M_3}{3 EI} = \frac{1 - 2 M_1}{3 EI} \rightarrow \boxed{M_3 + 2 M_1 = 1}$$

Por otra parte, la suma de momentos que concurren en el nudo B ha de ser nula.



De ambas ecuaciones deducimos:

$$\left. \begin{aligned} M_3 + 2 M_1 &= 1 \\ M_3 - M_1 &= -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{3} \\ M_3 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces:

$$R_A = \frac{2}{3} Tn. ;$$

$$R_{AX} = \frac{1}{6} Tn.$$

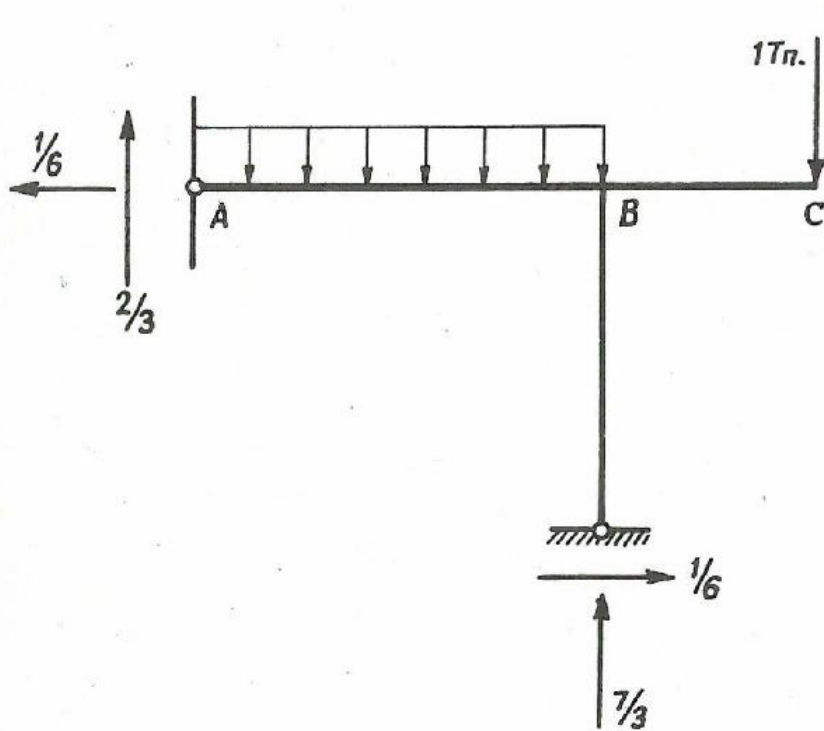
$$R_B = \frac{7}{3} Tn. ;$$

$$R_{BX} = -\frac{1}{6} Tn.$$

$$R_{DX} = -\frac{1}{6} ;$$

$$R_{DY} = R_B = \frac{7}{3} Tn.$$

Reacciones=:



$$R_{Ay} = \frac{2}{3} Tn ; R_{Ax} = \frac{1}{6} Tn.$$

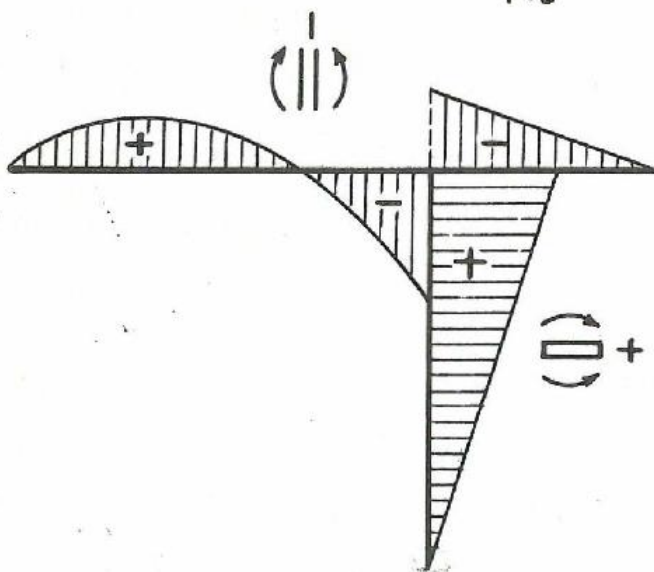
$$R_{Dy} = \frac{7}{3} Tn ; R_{Dx} = -\frac{1}{6} Tn.$$

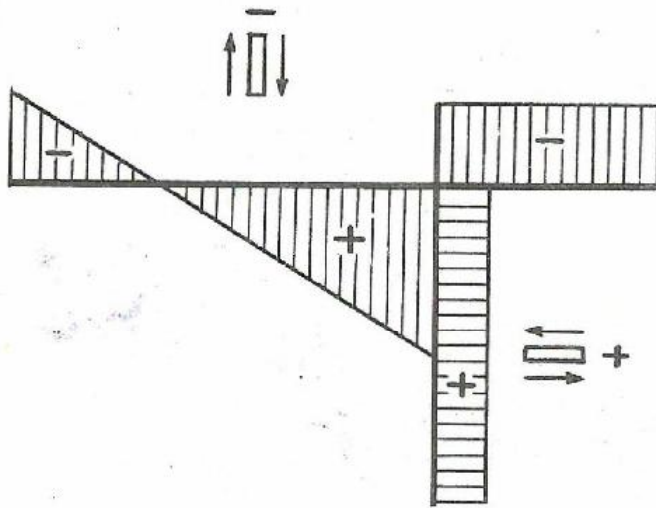
Leyes de M_f

$$M_f|_A^B = \frac{2}{3} x - \frac{x^2}{2} ; 0 \leq x \leq 2.$$

$$M_f|_B^C = x - 1 ; 0 \leq x \leq 1.$$

$$M_f|_D^B = -\frac{1}{6} x ; 0 \leq x \leq 2.$$





Leyes de Q

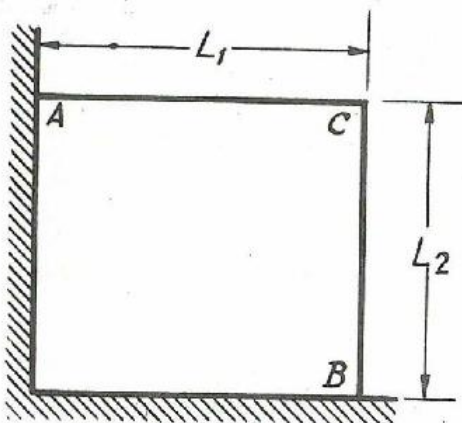
$$Q \Big|_A^B = x - \frac{2}{3}; 0 \leq x \leq 2.$$

$$Q \Big|_B^C = -1$$

$$Q \Big|_D^B = \frac{1}{6}$$

-o-

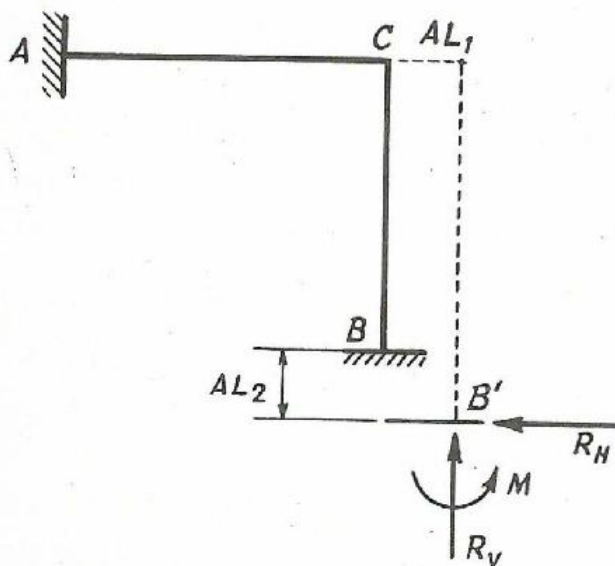
4. El pórtico de la figura sufre un incremento de Δt° grados C sobre la temperatura a la que se verificó su construcción. Estudiar las reacciones y momentos de empotramiento que aparecen en la sustentación B, denidas a aquel efecto. Coeficiente de dilatación lineal: k.



Estudiar las reacciones y momentos de empotramiento que aparecen en la sustentación B, denidas a aquel efecto. Coeficiente de dilatación lineal: k.

Proceso a seguir: Liberaremos el empotramiento B y dejaremos que la estructura se dilate sin coacciones, de forma que el punto B adquirirá la posición B'. Seguidamente introduciremos (Fig. 2) los esfuerzos \bar{R}_H \bar{R}_V \bar{M} que restituye el punto B' a su posición primitiva B y de forma que el ángulo B quede recto.

Para ello lo haremos por etapas sucesivas, anulando primero el corrimiento ΔL_1 , luego ΔL_2 y, finalmente $B = 90^\circ$.



Sean f_{R_H} f_{R_V} f_M los corrimientos horizontales que producen por separado los esfuerzos R_H R_V M .

Por superposición de efectos:

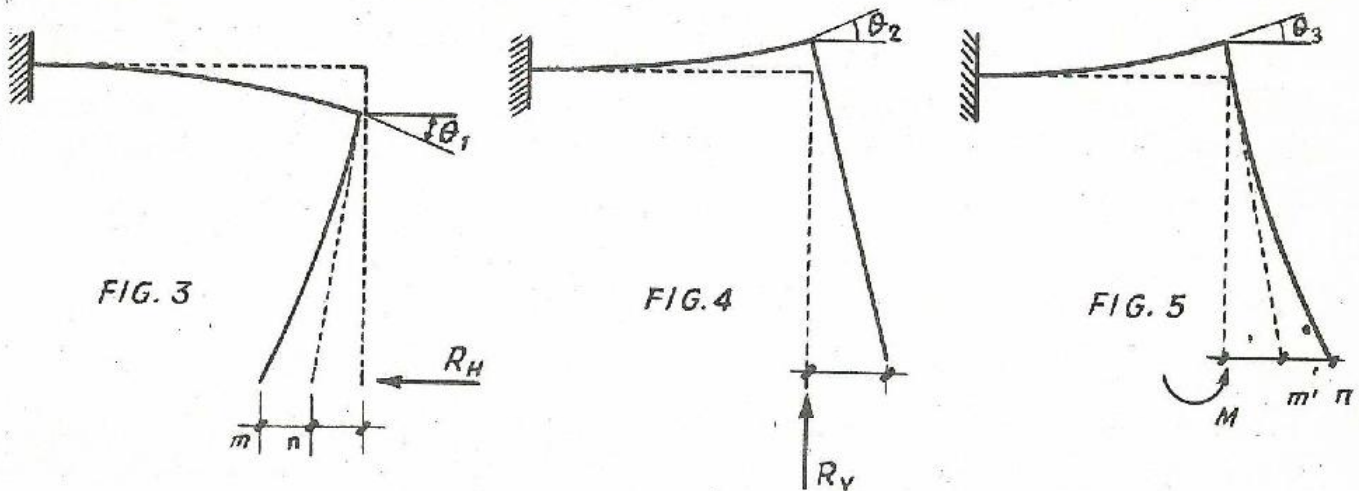
$$-\Delta L_1 = f_{R_H} + f_{R_V} + f_M \quad \text{donde } \Delta L_1 = L_1 k \cdot \Delta t^\circ$$

y observando las figuras 3, 4, y 5 la expresión anterior, queda

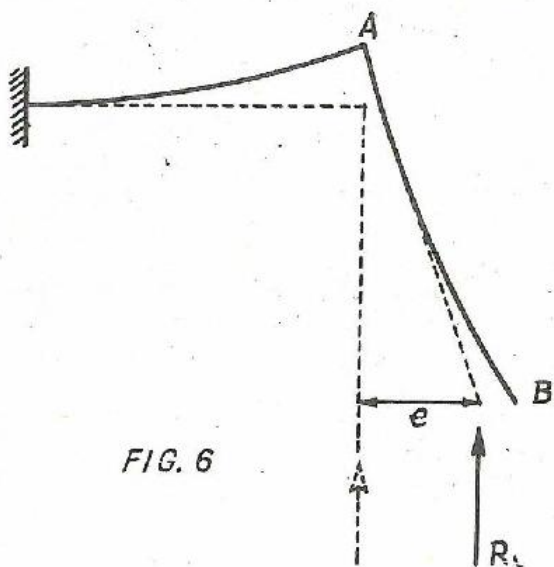
$$-\Delta L_1 = [\theta_1 L_2 + mn] + [\theta_2 L_2] + [\theta_3 L_2 + m' n'] =$$

$$= - \left[\frac{R_H L_2 L_1}{EI} L_2 + \frac{R_H L_2^3}{3 EI} \right] + \left[\frac{R_V L_1^2}{2 EI} \cdot L_2 \right] + \left[\frac{ML_1}{EI} L_2 + \frac{ML_2^2}{2 EI} \right]$$

Podría objetarse que la deformada de la fig. 4 no es exacta y que al tomar la carga R_V una excentricidad "e" (fig. 6) traería como consecuencia la aparición de un momento en A que haría mayor el giro θ_2 además de introducir en B una flecha horizontal adicional. Esto es cierto, pero tanto el giro como la flecha mencionados son infinitésimos de 2º orden respecto a los



corrimientos que estamos calculando y podemos despreciarlos. En los casos siguientes surge el mismo problema que ya no mencionaremos.



Si son f'_{R_H} f'_{R_V} f'_M los corrimientos verticales que introducen los esfuerzos R_H R_V M , análogamente a antes

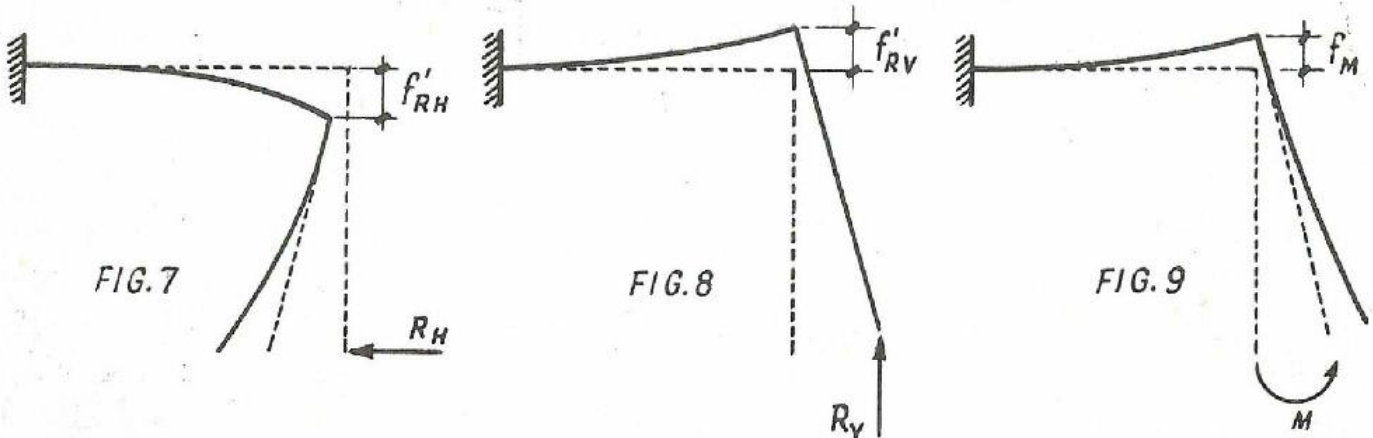
$$\Delta L_2 = f'_{R_H} + f'_{R_V} + f'_M$$

donde

$$\Delta L_2 = L_2 \cdot k \Delta t^0$$

y de las figuras 7, 8, 9 se deduce que la "expresión anterior, es:

$$\Delta L_2 = - \left[\frac{R_H L_2}{EI} \frac{L_1^2}{2} \right] + \left[\frac{R_V L_1^3}{3 EI} \right] + \left[M \frac{L_1^2}{2 EI} \right]$$

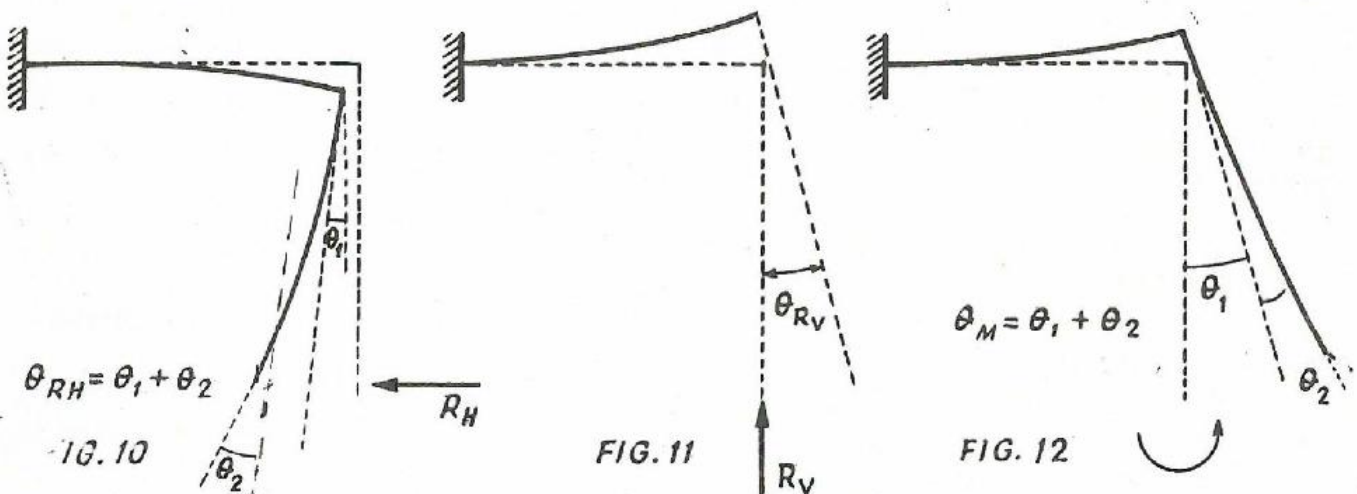


Finalmente, si θ_{RH} , θ_{RV} , θ_M son los giros que en el extremo empotrado del soporte se producen debido a los esfuerzos R_H , R_V y M , se tendrá:

$$\theta = \theta_{RH} + \theta_{RV} + \theta_M$$

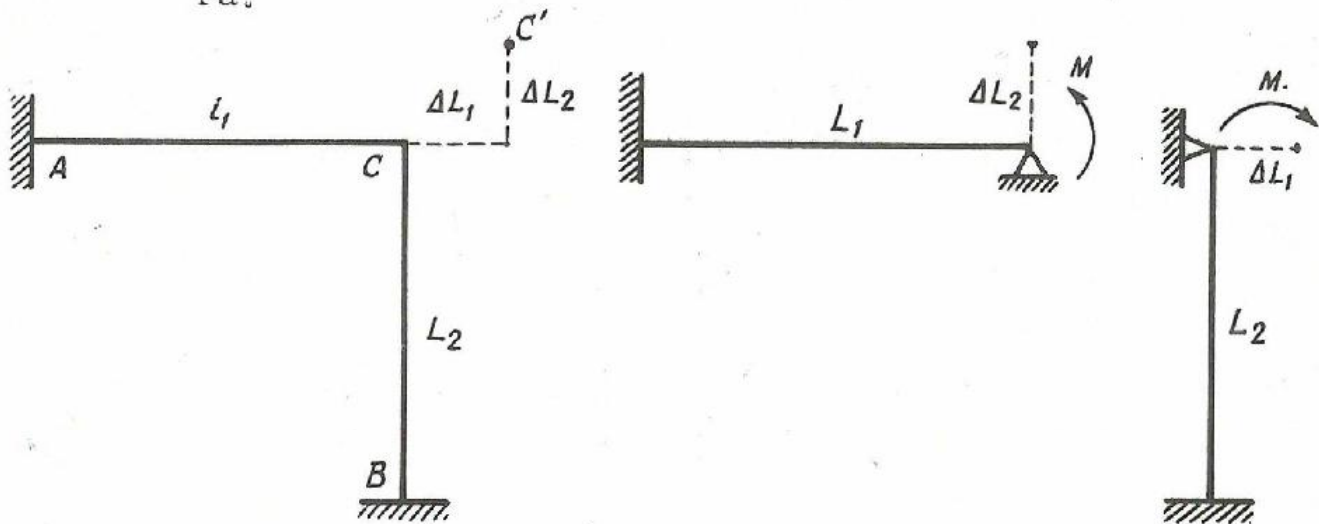
y de la inspección de las figuras 10, 11 y 12, resulta:

$$\theta = \left[\frac{1}{EI} \frac{R_H L_2}{2} L_1 + \frac{1}{EI} \frac{L_2^2 R_H}{2} \right] + \left[-\frac{1}{EI} \frac{R_V L_1^2}{2} \right] \left[-\frac{ML_1}{EI} - \frac{ML_2}{EI} \right]$$



Con las tres ecuaciones planteadas con incógnitas R_H , R_V y M podemos deducir éstas:

4-bis. - El procedimiento anteriormente expuesto representa el método general de cálculo a seguir en la determinación de hiperestáticas; no obstante, en la mayoría de los casos llegaremos más rápidamente a la solución - estudiando el equilibrio de los nudos de la estructura.



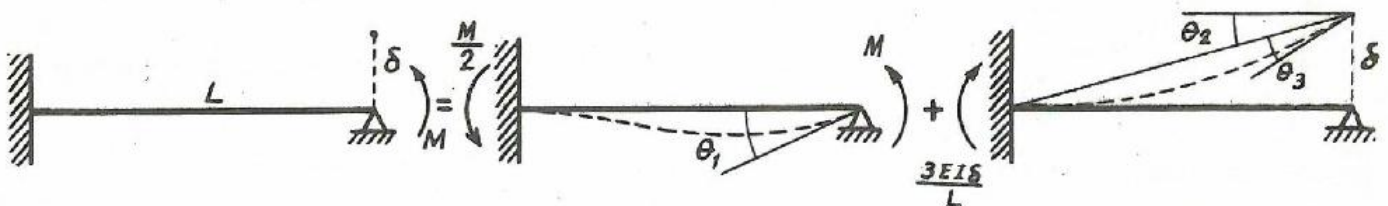
En el caso que se estudia como despreciamos la deformación por esfuerzo axial de los soportes, el punto c pasará a ocupar una posición c' siendo:

$$\Delta L_1 = K L_1 \Delta t \quad \Delta L_2 = K L_2 \Delta t$$

Podemos considerar entonces cada pieza del semipórtico, como una viga empotrada y apoyada, sometida a un momento M , en la que el extremo apoyado ha sufrido un descenso de apoyo, (ΔL_1 , y ΔL_2) y obligar a que los giros de los extremos apoyados sean iguales para ambas piezas.

Como por otra parte ΔL_1 , e ΔL_2 son despreciables frente a L_1 y L_2 , podemos considerar a L_1 y L_2 como longitudes de las vigas.

Por tanto, el problema se reduce a calcular el giro del apoyo de una viga empotrada y apoyada, por la acción de un momento y de un descenso de dicho apoyo.



$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$$

$$\vartheta_1 = \frac{ML}{3EI} - \frac{ML}{12EI} = \frac{ML}{4EI}$$

$$\vartheta_2 = \frac{\delta}{L}$$

$$\vartheta_3 = \frac{3EI\delta}{L} \cdot \frac{L}{6EI} = \frac{\delta}{2L}$$

Por tanto,

$$\vartheta = \frac{ML}{4EI} + \frac{3\delta}{2L}$$

Para la pieza de longitud L_1 tenemos entonces:

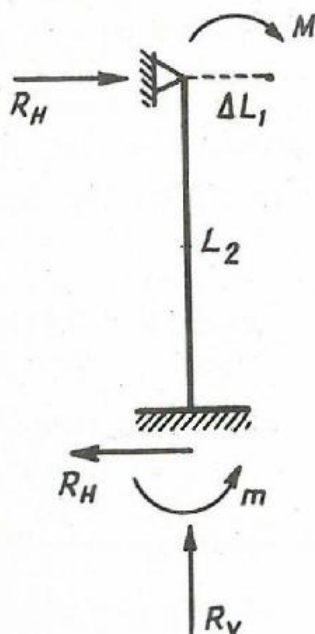
$$\vartheta = \frac{ML_1}{4EI} + \frac{3\Delta L_2}{2L_1}$$

Para la pieza de longitud L_2 :

$$\vartheta = - \left(\frac{ML_2}{4EI} + \frac{3\Delta L_1}{2L_2} \right)$$

Por tanto,

$$\frac{M}{4EI} (L_1 + L_2) = - \frac{3}{2} \left[\frac{\Delta L_2}{L_1} + \frac{\Delta L_1}{L_2} \right]$$



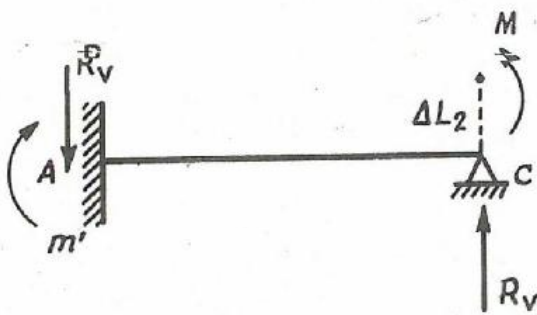
Finalmente,

$$M = - \frac{6EI}{(L_1 + L_2)} \left[\frac{\Delta L_2}{L_1} + \frac{\Delta L_1}{L_2} \right]$$

Una vez determinado el momento M podremos determinar fácilmente las reacciones en el extremo B pedido.

Considerando la pieza CB, tenemos:

$$m = \frac{3EI\Delta L_1}{L_2} - \frac{M}{2}$$

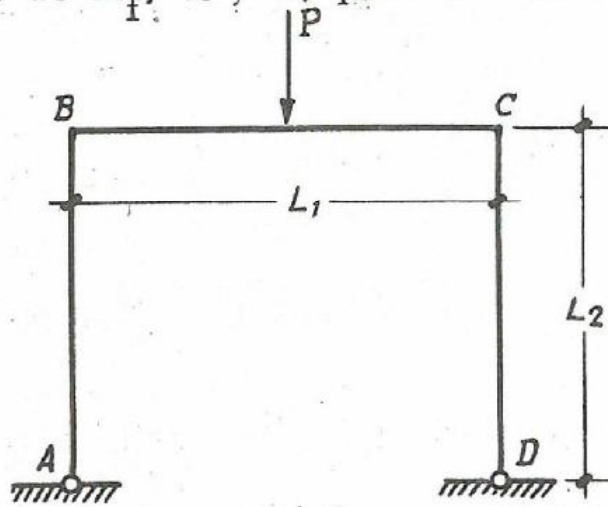


$$R_H = \frac{m-M}{L_2} = \frac{6 EI \Delta L_1 - 3 ML_2}{2 L_2^2}$$

La reacción R_V será la reacción en el apoyo ficticio c, que hemos creado en la pieza AC.

$$R_V = \frac{m' - M}{L_1} = \frac{6 EI \Delta L_2 - 3 ML_1}{2 L_1^2}$$

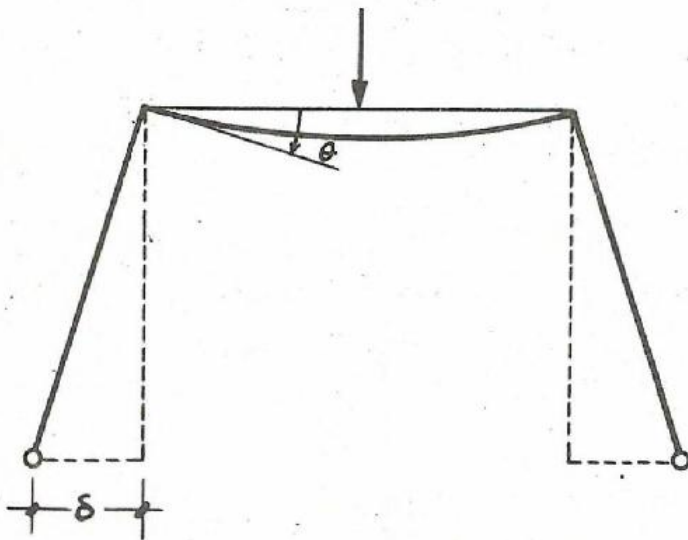
5. Calcular la reacción horizontal en el pórtico indicado en la figura y leyes de M_f , Q y N , para $P = 16 \text{ Tn}$ y $L_1 = 2L_2 = 8 \text{ m}$.



1º. La hacemos isostática.

El dintel se encuentra en el caso de una viga simplemente apoyada.

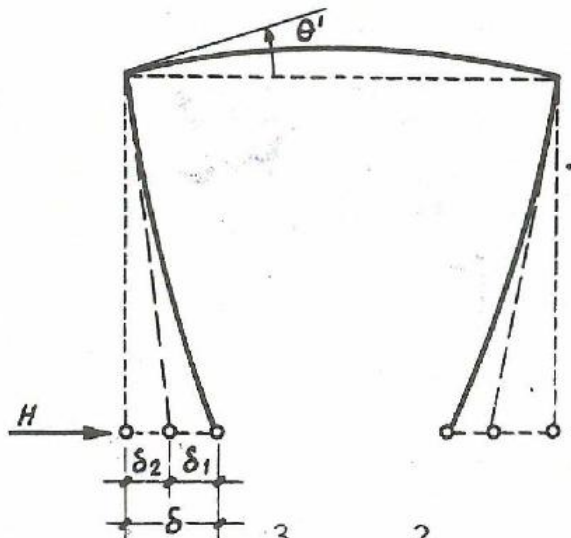
$$\vartheta = \frac{PL_1^2}{16 EI} \quad (1)$$



Introduzcamos unas fuerzas horizontales "H" en la estructura, isostática descargada que produzcan un corrimiento horizontal δ .

El ángulo ϑ' es debido al

momento que aparece en el nudo debido a la fuerza H.



$$\theta' = \frac{HL_2 \cdot L_1}{2EI} \rightarrow \delta_2 = L_2 \theta'$$

$$\delta_1 = \frac{HL_2^3}{3EI}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{HL_2^3}{3EI} + \frac{HL_2^2 L_1}{2EI} \quad (2)$$

Iguando (1) y (2):

$$\frac{HL_2^3}{3EI} + \frac{HL_2^2 L_1}{2EI} = \frac{P L_1^2}{16EI} \cdot L_2 \rightarrow H = \frac{3 P L_1^2}{8 L_2 (3 L_1 + 2 L_2)}$$

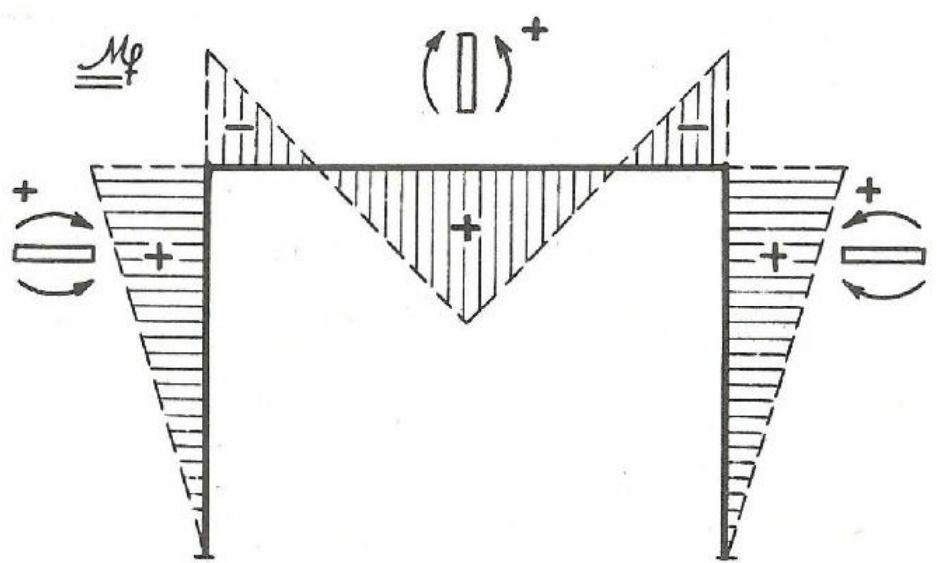
Para $P = 16 \text{ Tn}$ y $L_1 = 2 L_2 = 8 \text{ mts.}$

$H = 3 \text{ Ton.}$

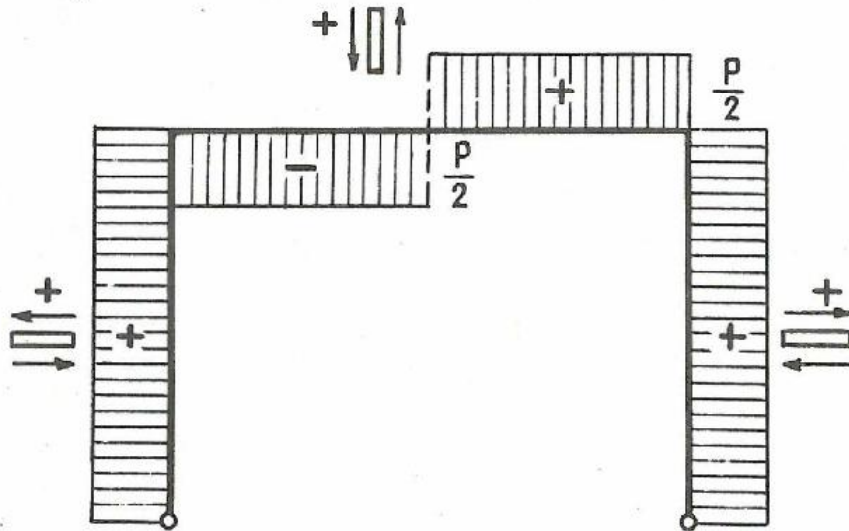
Momento de empotramiento: $M_B = M_C = H \cdot L_2 = \underline{12 \text{ m-T.}}$

Momento flector en el punto medio del dintel.

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{L_1}{2} - M_B = M = \frac{16 \cdot 8}{4} \cdot 12 = \underline{20 \text{ m-T.}}$$



Leyes de Q.



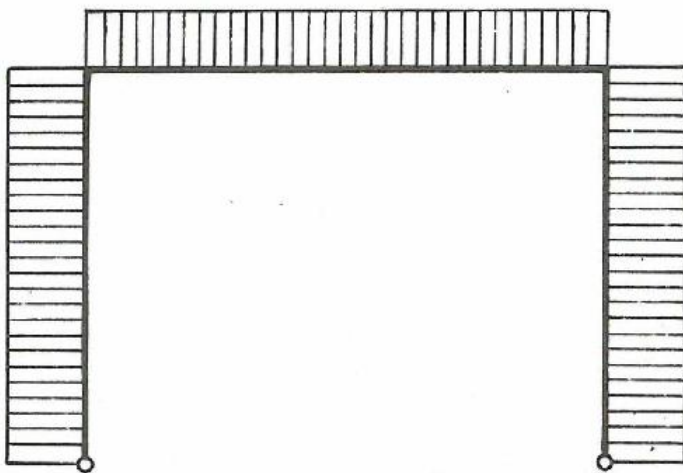
En el dintel:

$$Q = \pm \frac{P}{2}$$

En los soportes

$$Q = H$$

Ley de N.



En el dintel
N = H de com
presión.

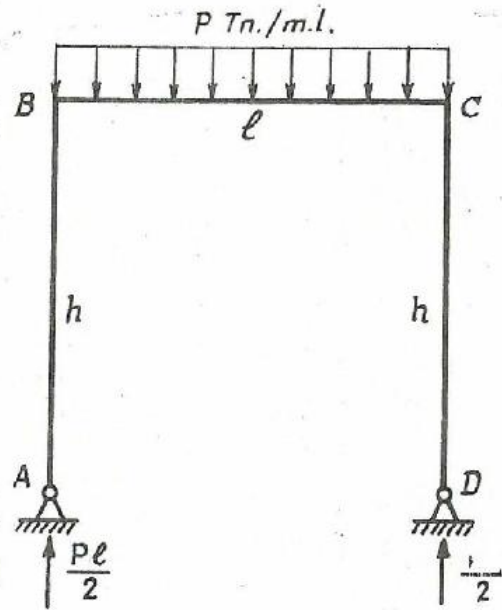
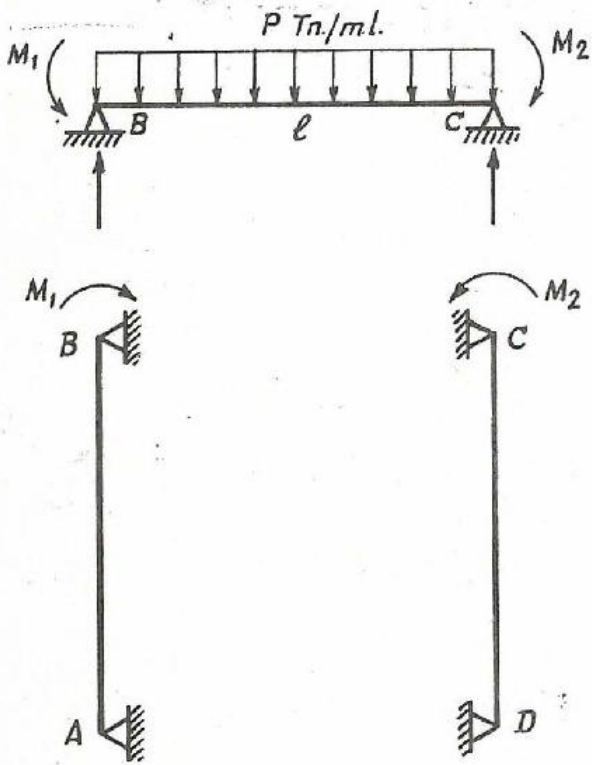
En los sopor-
tes: el axil es
de compresión
de valor P/2.

6. Calcular las leyes de M_f , Q y N, en la estructura adjunta:

Las reacciones en A y B son verticales y valen $\frac{Pl}{2}$.

Los giros en B y C han de ser iguales en todas las vigas.

$$\omega_B = -\frac{M_1 h}{3 EI} = +\frac{M_1 \ell}{3 EI} + \frac{M_2 \ell}{6 EI} - \frac{Pl^3}{24 EI}$$



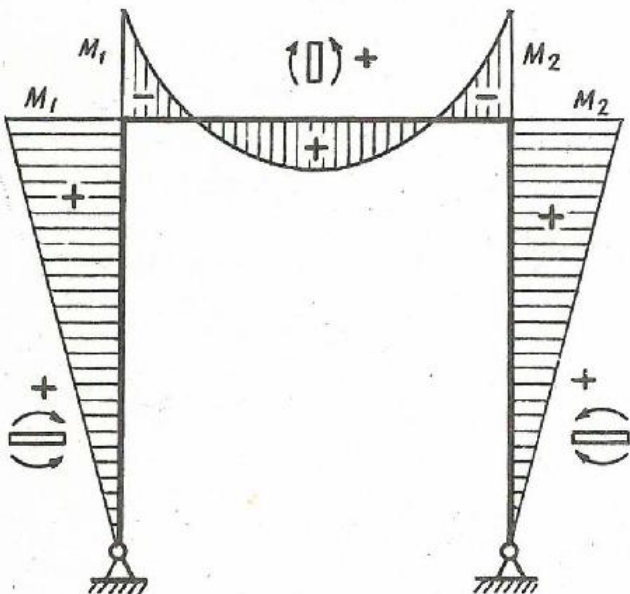
$$\omega_C = \frac{M_2 h}{3EI} = -\frac{M_2 l}{3EI} - \frac{M_1 l}{6EI} + \frac{Pl^3}{24EI}$$

Luego:

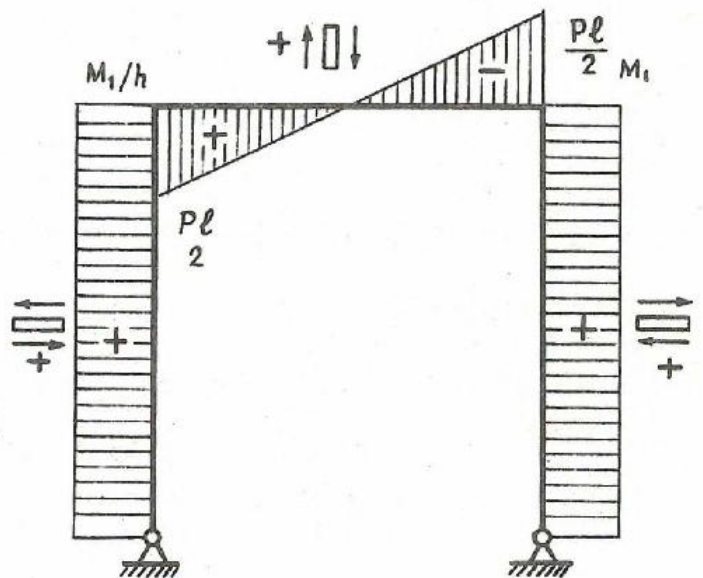
$$|M_1| = |M_2| = \frac{Pl^3}{4} \frac{\ell + 2h}{4(\ell+h)^2 - \ell^2}$$

como podía preverse de la simetría de cargas y de estructura.

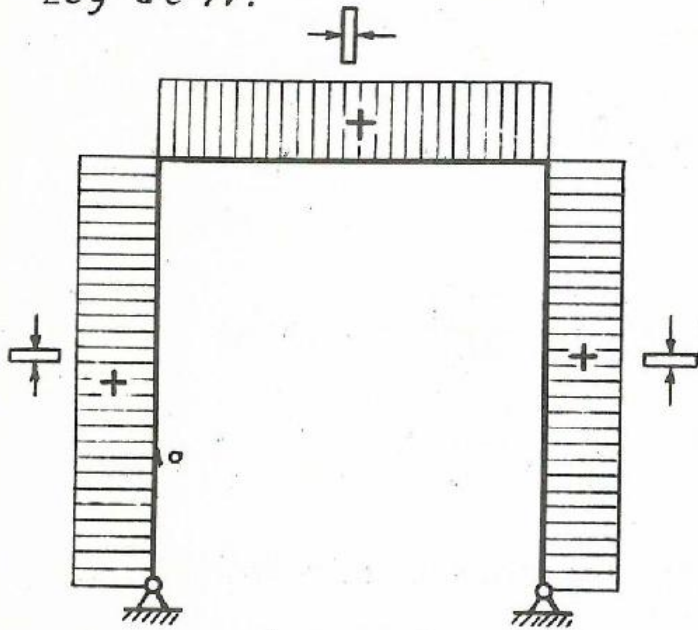
Leyes de $M\phi$



Leyes de Q



Ley de N .



Compresión en el dintel de valor

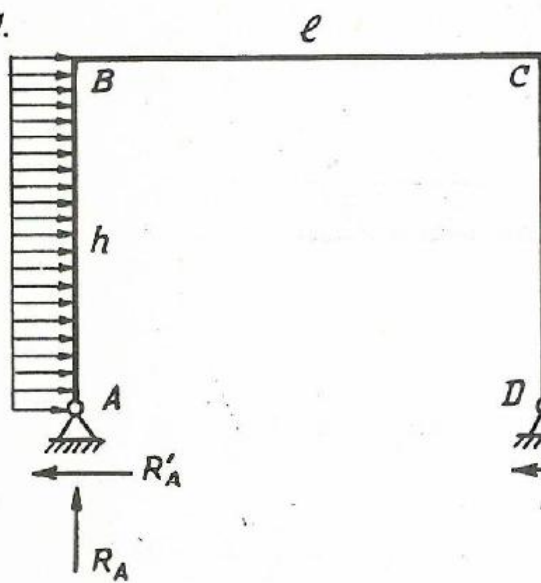
$$\frac{M_1}{h} = \frac{M_2}{h}$$

Compresión en los soportes de valor

$$\frac{P\ell}{2}$$

7. Dibujar las leyes de M_f Q , que se producen en la estructura adjunta para la carga representada. Tomando momentos en A y D

$P\ell/m.l.$



$$\left. \begin{aligned} R_A &= -\frac{Ph^2}{2\ell} \\ R_D &= \frac{Ph^2}{2\ell} \end{aligned} \right\} R'_A + R'_D = P \cdot h$$

Aplicando el teorema de Castigliano.

Entre A y B.

$$\begin{aligned} M_f \Big|_A^B &= R'_A \cdot x - \frac{Px^2}{2} = \\ &= (Ph - R'_D)x - \frac{Px^2}{2} \\ \frac{\partial M_f}{\partial R'_D} \Big|_A^B &= -x. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial R'_D} = \int_0^h \left[-(Ph - R'_D)x^2 + \frac{Px^3}{2} \right] \frac{dx}{EI} = \left[-\frac{5}{24}Ph^4 + R'_D \frac{h^3}{3} \right] \frac{1}{EI}$$

II. Entre B y C.

$$M_f \Big|_B^C = -R'_D h + \frac{Ph^2}{2l} (\ell - x) ; \quad \frac{\partial M_f}{\partial R'_D} = -h$$

$$\frac{\partial u}{\partial R'_D} = \int_0^\ell \left[R'_D h^2 - \frac{Ph^3}{2l} (\ell - x) \right] \frac{dx}{EI} = \left[R'_D h^2 \ell - \frac{Ph^3 \ell}{4} \right] \frac{1}{EI}$$

III. Entre C y D

$$M_f \Big|_C^D = -R'_D (h-x) ; \quad \frac{\partial M_f}{\partial R'_D} = -(h-x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial R'_D} \int R'_D (h-x)^2 \frac{dx}{EI} = R'_D \frac{h^3}{3}$$

Sumando los tres valores de $\frac{\partial u}{\partial R'_D}$ tenemos el corrimiento del nudo D en la dirección de R'_D que ha de ser nulo.

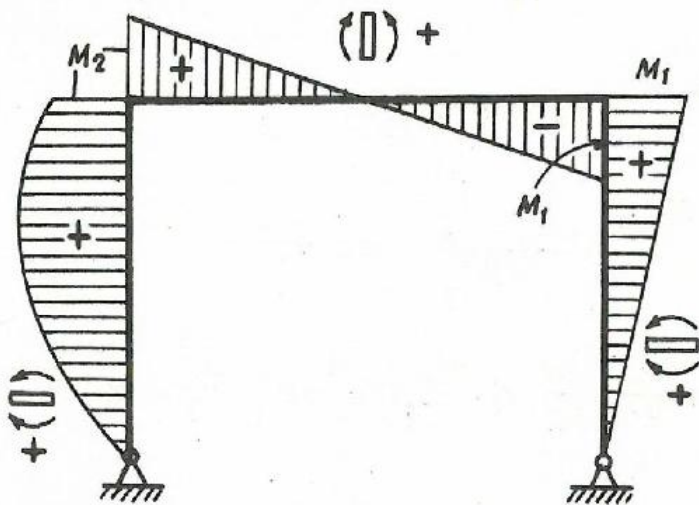
$$-\frac{5}{24} Ph^4 + R'_D \frac{h^3}{3} + R'_D h^2 \ell - \frac{Ph^3}{4} + R'_D \frac{h^3}{3} = 0$$

Sacamos

$$R'_D = \frac{Ph}{8} \frac{5h + \ell}{2h + 3\ell}$$

$$R'_A = Ph - R'_D = \frac{Ph}{8} \frac{11h + 18\ell}{2h + 3\ell}$$

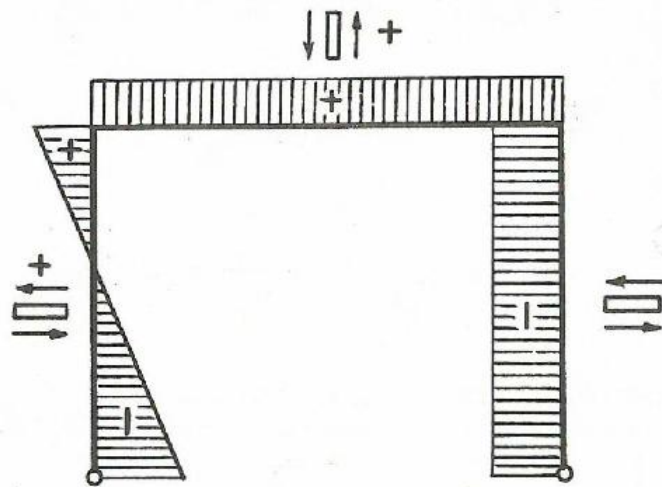
Ley de M_f



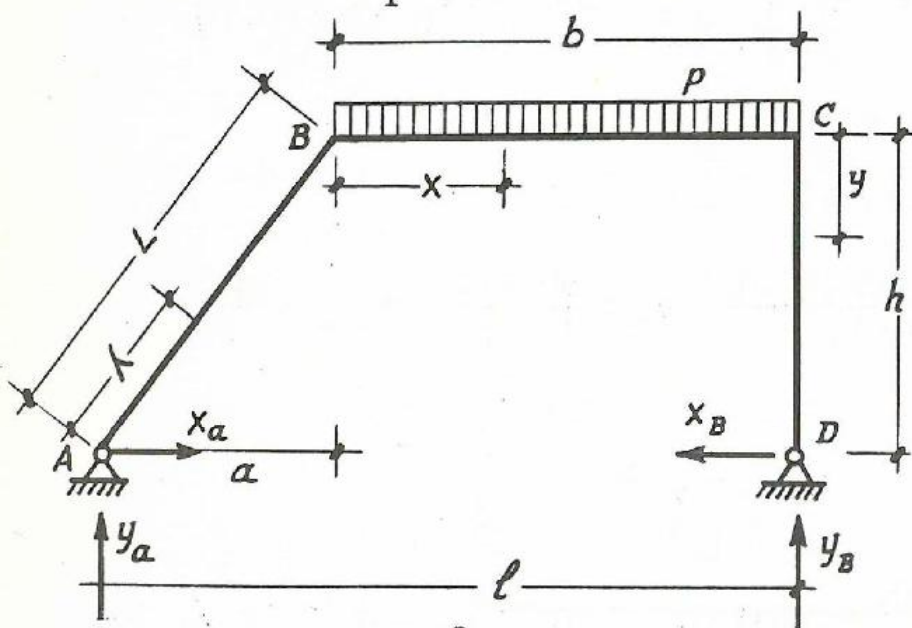
$$M_1 = R'_D \cdot h$$

$$M_2 = R'_A \cdot L - p \frac{h^2}{2}$$

Ley de Q



8. En el pórtico de la figura. Calcular las reacciones y el diagrama de M_f , Q y N .



De las ecuaciones de estática.

$$X_2 = X_B$$

$$Y_a + Y_B = pb$$

$$Y_B \cdot l = pb \left(\frac{b}{2} + a \right)$$

$$Y_B = \frac{pb}{2} \cdot \frac{l+a}{l}$$

Consideramos X_B como hiperestática.

$$M_f \Big|_0^L = Y_A \cdot \frac{\lambda a}{L} - X_A \frac{\lambda h}{L}$$

$$M_{f_x} \Big|_0^b = Y_B (b-x) - X_B \cdot h - p \frac{(b-x)^2}{2}$$

$$M_{f_y} \Big|_0^h = -X_B (h-y)$$

Ponemos estos M_f en función de X_B .

$$M_{f_h} \Big|_0^L = \frac{pab^2\lambda}{2Ll} - \frac{\lambda h}{L} X_B \rightarrow \frac{\partial M_f}{\partial x_B} = -\frac{\lambda h}{L}$$

$$M_{f_x} \Big|_0^b = \frac{pb}{2} \frac{\ell+a}{l} (b-x) - h x_B - \frac{P}{2} (b-x)^2; \frac{\partial M_f}{\partial x_B} = -h$$

$$M_{f_x} \Big|_0^h = -(h-y)X_B \rightarrow \frac{\partial M_f}{\partial x_N} = -(h-y)$$

Como el corrimiento de D = 0, tenemos:

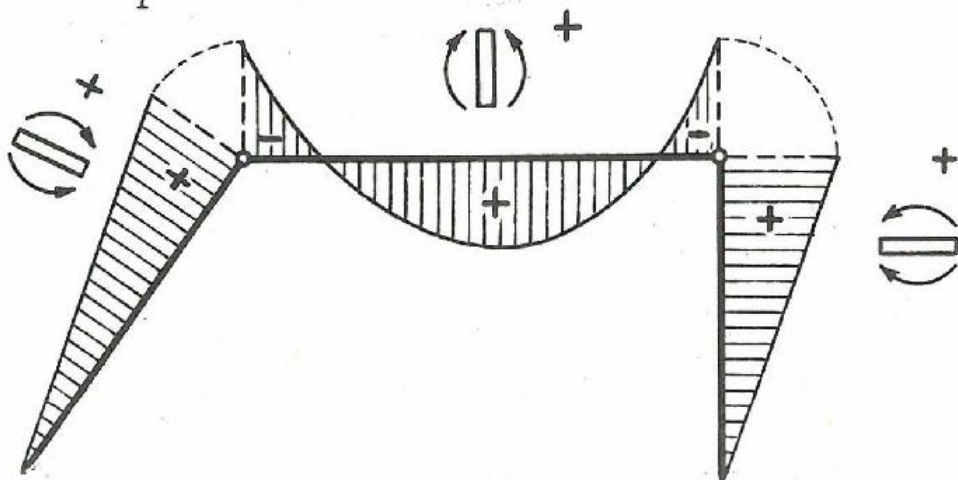
$$\int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial J} d\varphi = 0$$

$$\int_0^L \frac{\lambda h}{L} \left(\frac{pab^2}{2Ll} - \frac{hx_B}{L} \right) d\lambda - \int_0^b \left[\frac{pb(\ell+a)}{2l} (b-x) - h x_B - \frac{P}{2} (b-x)^2 \right] h dx + \int_0^h (h-y)^2 x_B \cdot dy = 0$$

operando:

$$X_B = \frac{pb^2}{4lh} \cdot \frac{2aL+b\ell+3ab}{L+h+3b} \quad y_B = \frac{pb}{2} \frac{\ell+a}{l} \quad y_A = \frac{pb^2}{2l}$$

Diagrama de M_f .



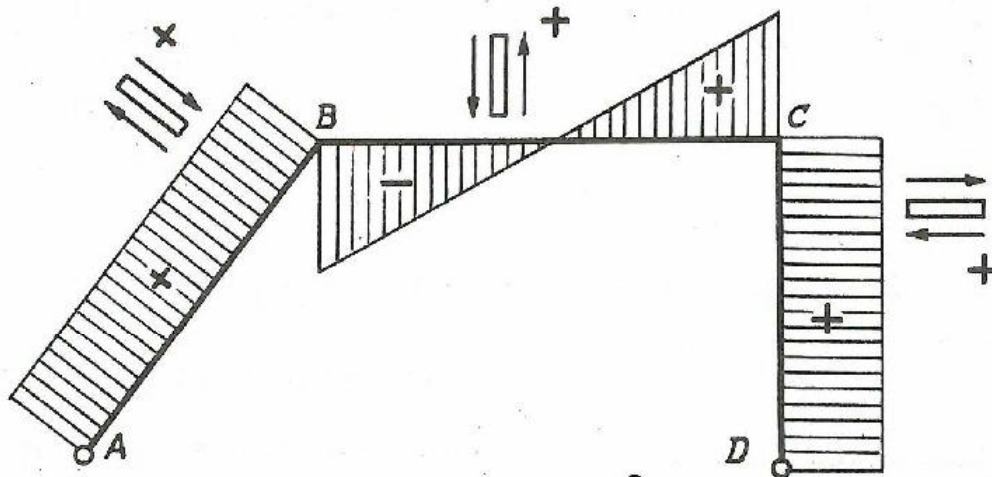
Tramo AB. - Lineal:

$$M_f = \frac{Pb}{4lL} \cdot \frac{2ah+3ab-bl}{L+h+3b} \cdot \lambda \begin{cases} \lambda=0 \rightarrow M_f = 0 \\ h=L. M_f = \frac{pb^2}{4l} \frac{2ah+3ab-bl}{L+h+3b} \end{cases}$$

Tramo BC parabólico $\begin{cases} x=0 & M_f = -\frac{pb^2}{4l} \cdot \frac{2ah+3ab-bl}{L+h+3b} \\ x=L & M_f = -\frac{pb^2}{4l} \cdot \frac{2ah+3ab+bl}{L+h+3b} \end{cases}$

Tramo CD lineal $-x_B(h-y) \begin{cases} y=0 & M_f = -\frac{pb^2}{4l} \cdot \frac{2ah+bl+3ab}{L+h+3b} \\ y=h & M_f = 0 \end{cases}$

Diagrama de Q.



Tramo AB. $Q = -X_a \frac{h}{L} + Y_a \frac{a}{L} = -\frac{pb^2}{4lh} \frac{2aL+bl+3ab}{L+h+3b} \cdot \frac{h}{L} + \frac{pb^2}{2l} \cdot \frac{a}{L}$

Tramo BC. $Q_X = Y_B - (b-x)p = \frac{pb}{2} \cdot \frac{l+a}{l} - (b-x)p$

$x=0 \rightarrow pb \left[\frac{l+a}{2l} - 1 \right]$

$x=b \rightarrow pb \frac{l+a}{2l}$

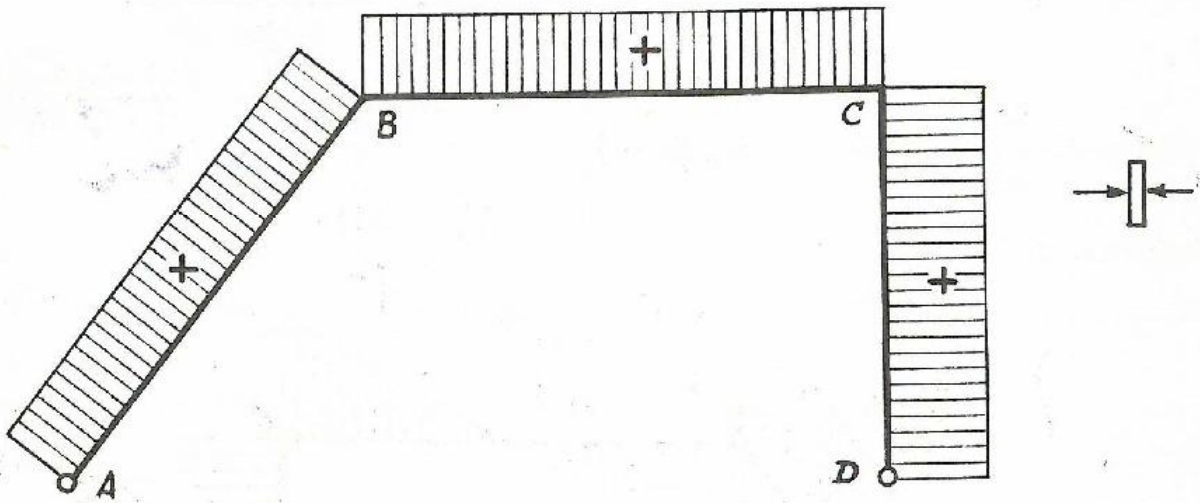
Tramo CD-(C^{te}) $Q = X_B = \frac{pb^2}{4lh} \cdot \frac{2aL+bl+3ab}{L+h+3b}$

Diagrama de axiles. (pág. siguiente).

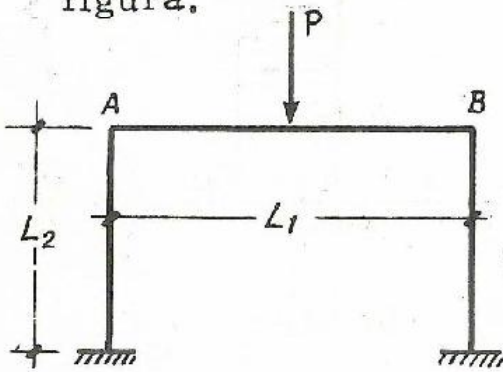
Tramo AB (C^{te}) $X_a \frac{a}{L} + Y_a \frac{l}{L}$

Tramo BC (C^{te}) X_B

Tramo CD (C^{te}) Y_B



9. Determinar las reacciones y ley de M_f en el pórtico de la figura.



Se trata de un pórtico intraslacional al que aplicamos el método explicado. Como los nudos A y B no se trasladan, el pórtico es descomponible según la figura 2.

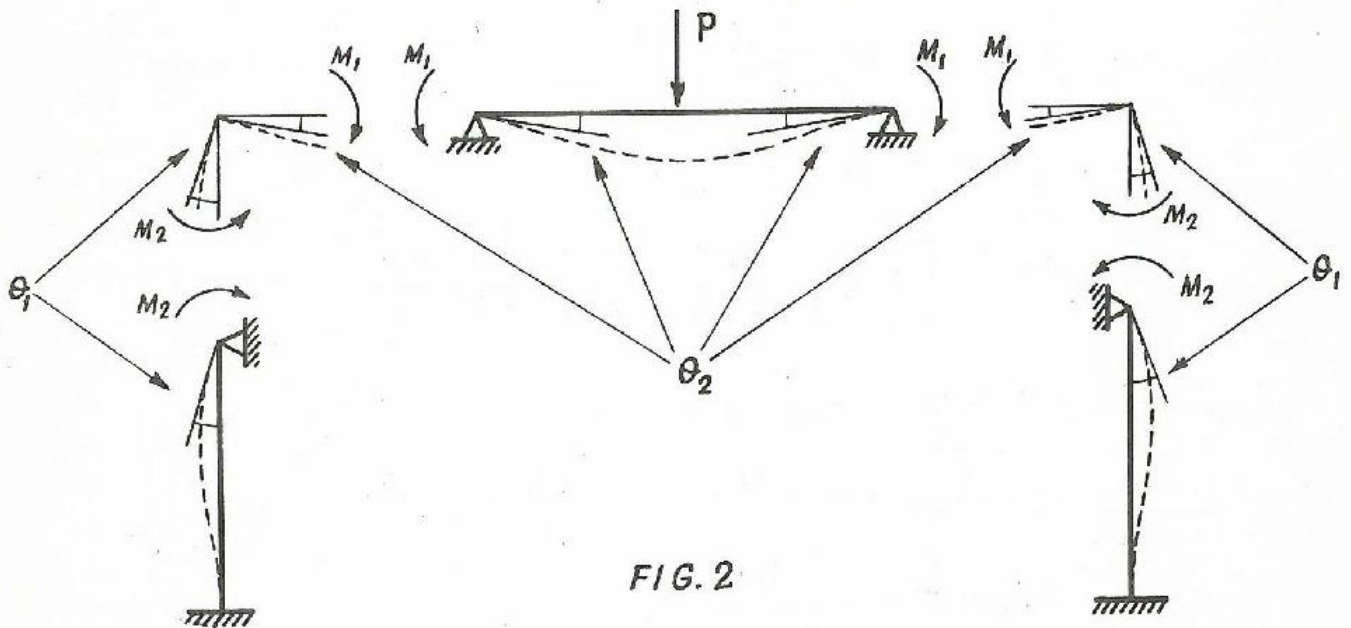


FIG. 2

Donde evidentemente el valor de θ_1 en la viga apoyada y empotrada por efecto de aplicación del momento M_2 , vale:

$$\theta_1 = \frac{1}{4} \frac{M_2 L_2}{EI}$$

y θ_2 en la viga simplemente apoyada, como consecuencia de la acción de la carga P y los momentos M_1 vale (fig. 3).

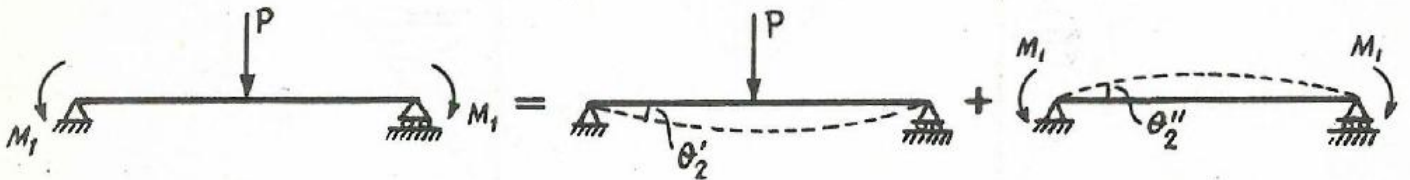


FIG. 3

$$\theta_2 = \theta'_2 + \theta''_2 = \frac{1}{16} \frac{PL_1^2}{EI} - \frac{1}{2} \frac{M_1 L_1}{EI}$$

y como debe verificarse en el nudo que:

$M_1 = M_2$; $\theta_1 = \theta_2$, resulta:

$$\frac{1}{4} \frac{M_2 L_2}{EI} = \frac{1}{16} \frac{PL_1^2}{EI} - \frac{1}{2} \frac{M_1 L_1}{EI}$$

y de aquí

$$M_1 = M_2 = \frac{\frac{1}{16} PL_1^2}{\left[\frac{1}{4} L_2 + \frac{1}{2} L_1\right]}$$

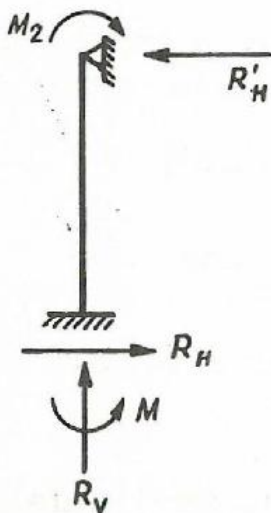
siendo entonces las reacciones (viga empotrada y apoyada)

$$R_H = \frac{3}{2} \frac{M_2}{L_2}$$

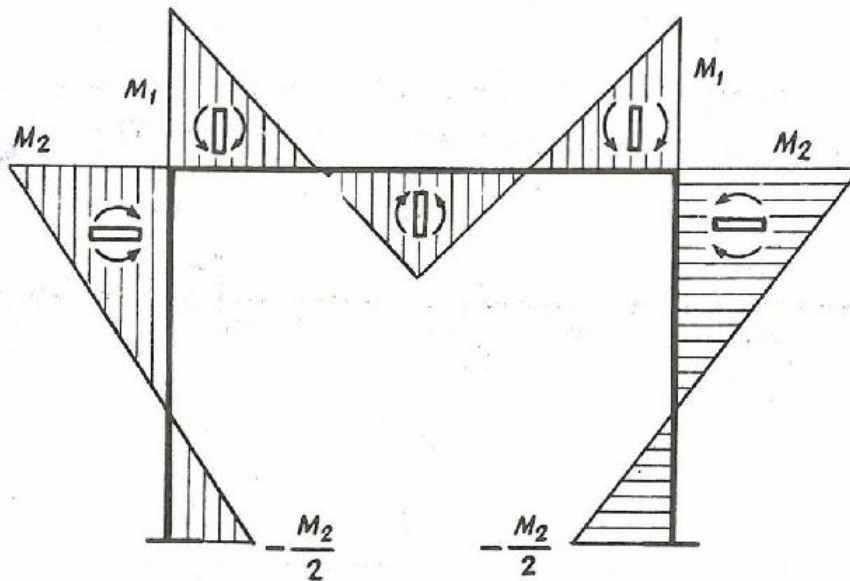
$$R_V = \frac{P}{2}$$

$$M = -\frac{M_2}{2}$$

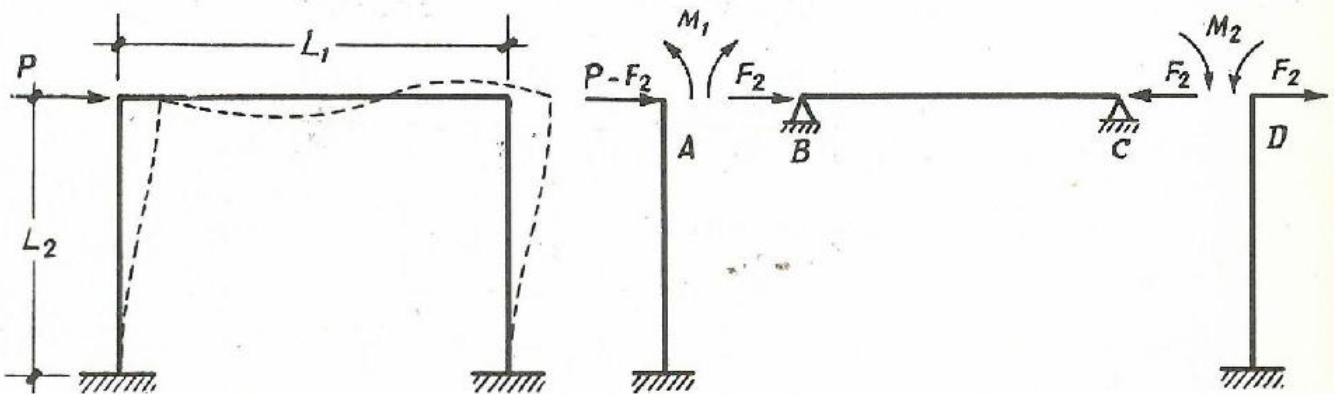
$$R'_H = -\frac{3}{2} \frac{M_2}{L_2}$$



y la ley de momentos flectores:



10. Estudiar la ley de momentos flectores en el pórtico adjunto.



Descomponemos el pórtico en las tres piezas indicadas; para que se mantenga la continuidad de la estructura, tendremos,

$$\vartheta_A \text{ (en ménsula)} = \vartheta_B \text{ (en dintel).}$$

$$\vartheta_C \text{ (en dintel)} = \vartheta_D \text{ (en ménsula).}$$

Como prescindimos de la deformación por esfuerzo axial del dintel, tendremos por otra parte.

Corrimiento horizontal de A = corrimiento horizontal de D.
Expresemos estas igualdades:

- De giros:

$$\frac{1}{EI} \frac{(P-F_2)L_2^2}{2} - \frac{M_1 L_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_1 L_1}{3} - \frac{M_2 L_1}{6} \right]$$

$$\frac{1}{EI} \frac{F_2 L_2^2}{2} - \frac{M_2 L_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_2 L_1}{3} - \frac{M_1 L_1}{6} \right]$$

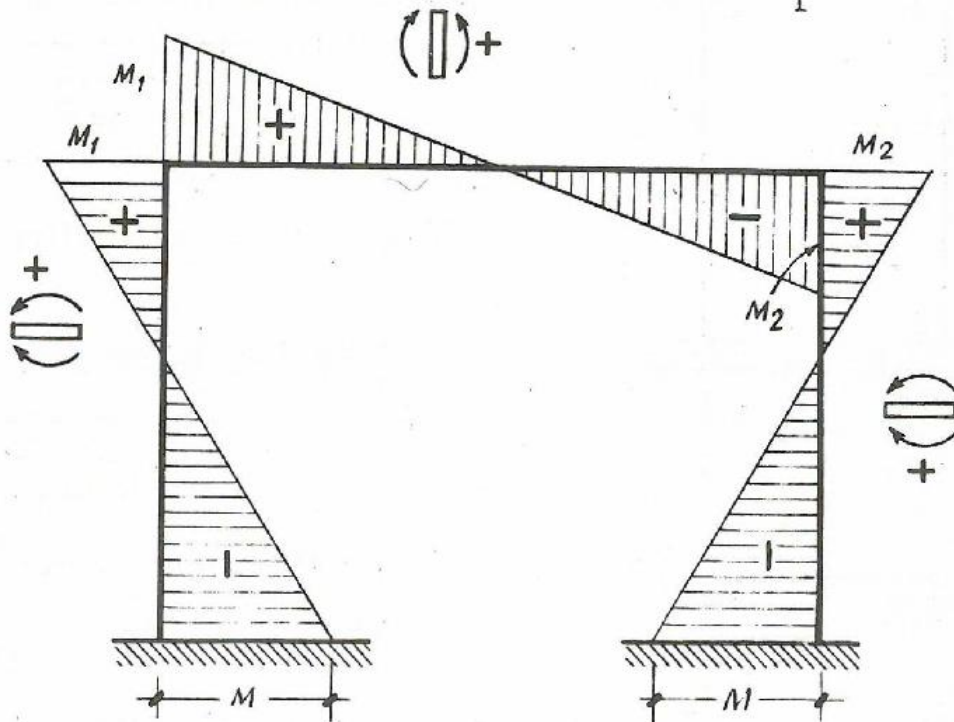
- De flechas:

$$\frac{(P-F_2) \cdot L_2^3}{3 EI} - \frac{M_1 L_2^2}{2 EI} = \frac{F_2 L_2^3}{3 EI} - \frac{M_2 L_2^2}{2 EI}$$

El sistema se resuelve fácilmente dada la simetría del mismo, obteniendo:

$$F_2 = \frac{P}{2} ; M_1 = M_2 = \frac{3PL_2^2}{2} \frac{1}{L_1+6L_2}$$

Una vez obtenido estos momentos la ley de M_f se obtiene fácilmente:

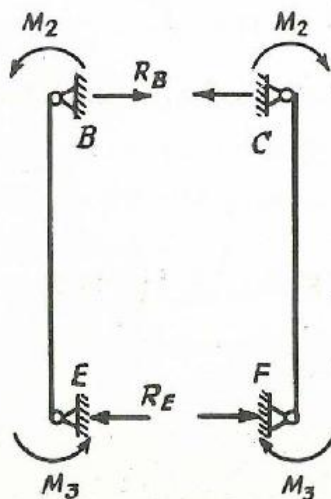
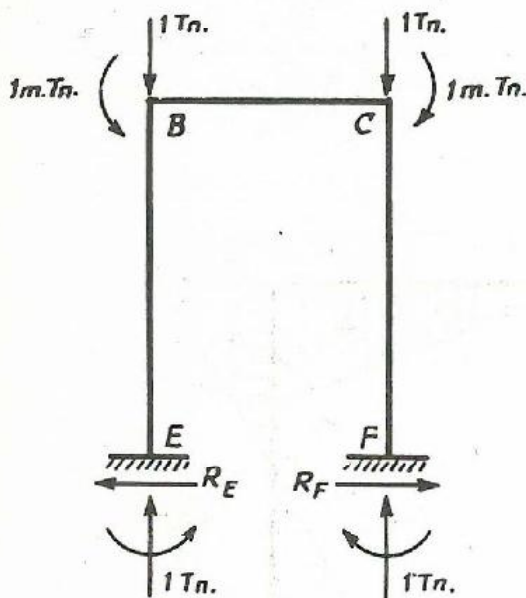
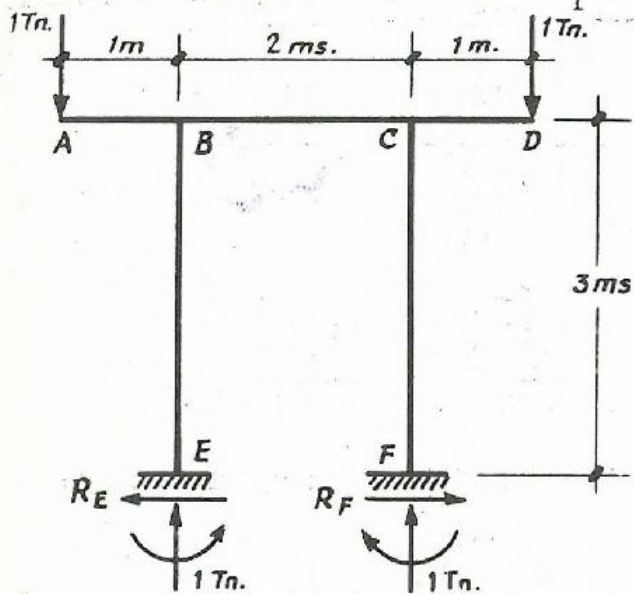


Los momentos flectores en el empotramiento, serán en módulo:

$$M = \frac{PL_2}{2} - M_1$$

La deformada será la indicada de puntos en la figura.

11. Dibujar las leyes de M_f y Q .



Los dos voladizos AB y CD se sustituyen por la acción cortante y el momento.

Descomponemos la estructura en tres vigas.

Ponemos la igualdad de giros en B.

$$\frac{M_1 \cdot 2}{3 EI} + \frac{M_1 \cdot 2}{6 EI} = \frac{M_2 \cdot 3}{3 EI} - \frac{M_3 \cdot 3}{6 EI}$$

$$M_1 = M_2 - \frac{1}{2} M_3$$

Por estar empotrado el soporte en E:

$$M_3 = + \frac{M_2}{2}$$

Poniendo el equilibrio del nudo B.

$$1 \text{ m. Tn} \left(\begin{array}{l} \curvearrowright M_1 \\ \curvearrowright M_2 \end{array} \right) \quad M_1 + M_2 = 1$$

Por estas tres ecuaciones:

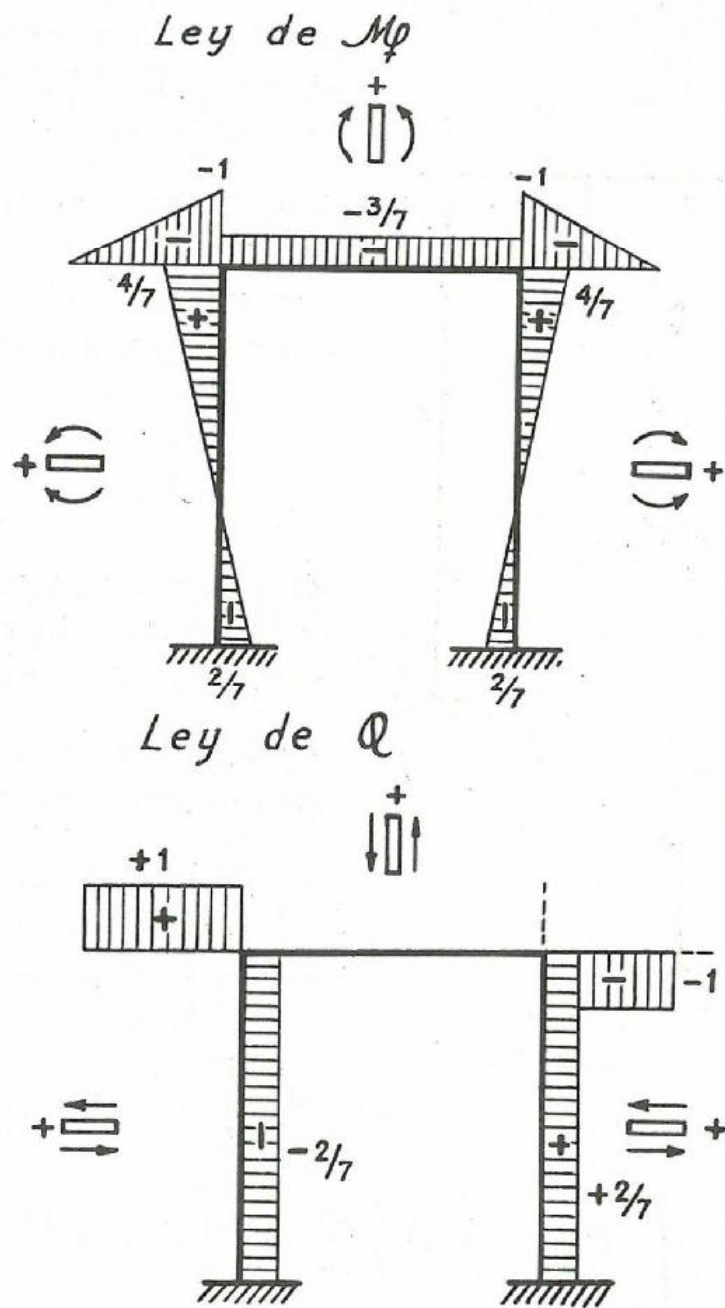
$$M_2 = \frac{4}{7} \text{ m. Tn} \quad ; \quad M_3 = + \frac{2}{7}$$

$$M_1 = + \frac{3}{7} \text{ m. Tn}$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} -3 R_B + M_2 + M_3 = 0 \\ -3 R_E + M_2 + M_3 = 0 \end{array} \right\}$$

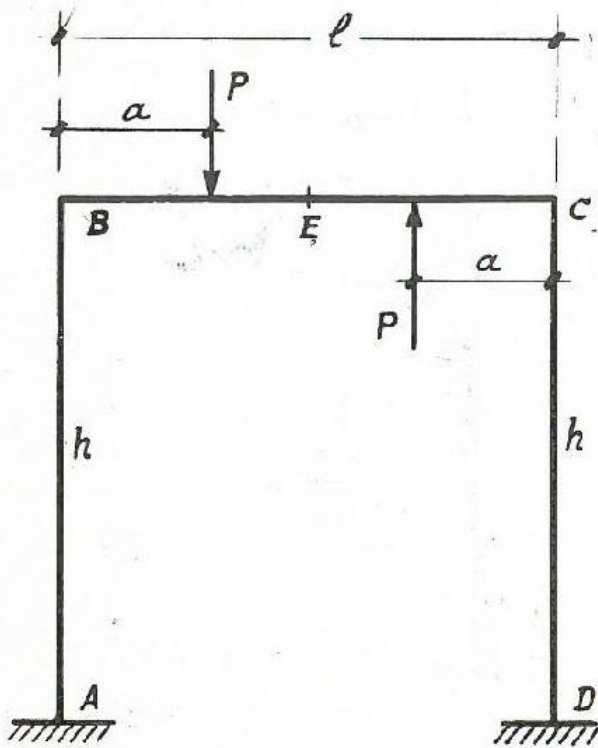
$$|R_B| = |R_E| = + \frac{1}{3} (M_2 + M_3) = + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} = + \frac{2}{7}$$



12. Calcular las leyes de esfuerzos en la estructura adjunta.

Si solo actuase la fuerza P de la izquierda, sobre el dintel habría un esfuerzo axial N . Si solo actuase la fuerza P de la derecha, aparece, en el dintel un axial igual y contrario al anterior. Por tanto, al actuar ambas fuerzas P , no existe axial en el dintel.

En el punto E , por la simetría de figura, tiene que haber un



punto de inflexión en la deformada; su curvatura es nula y el momento flector también nulo.

Así, pues, en el punto E solo existe esfuerzo cortante X y, por tanto, podremos cortar la estructura separando la mitad.

El punto E, tiene pues, giro y corrimiento horizontal pero no corrimiento vertical.

Aplicamos el teorema de Castigliano para deducir X.

$$M_f \Big|_F^E = X (\ell - x)$$

$$M_f \Big|_B^F = X (\ell/2 - x) + P(a - x)$$

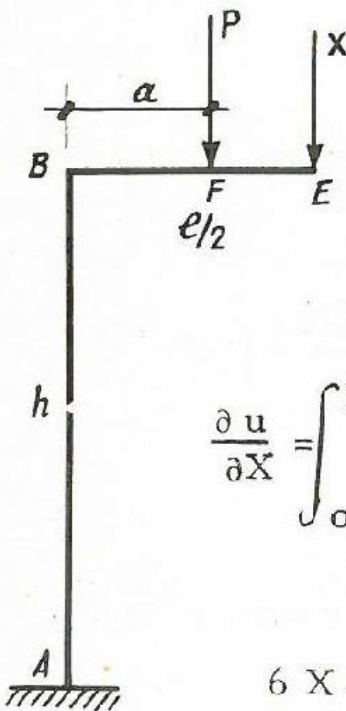
$$M_f \Big|_B^F = X \ell/2 + Pa$$

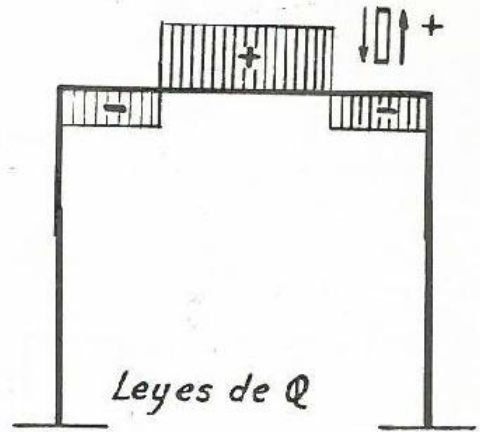
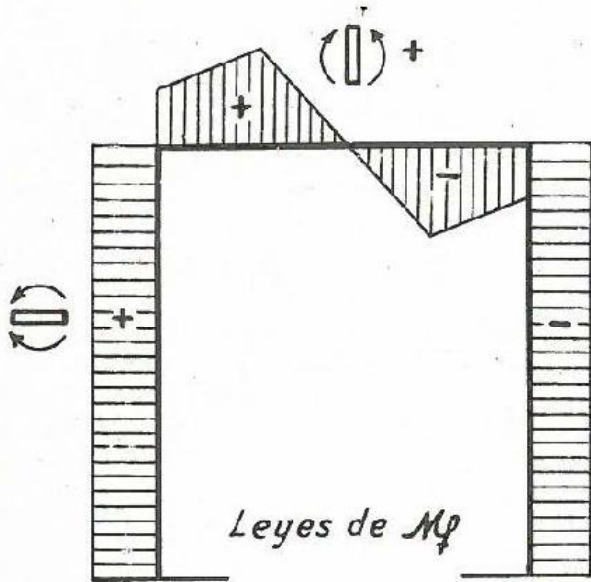
$$\frac{\partial u}{\partial X} = \int_0^h (X \frac{\ell}{2} + Pa) \frac{\ell}{2} \frac{dx}{EI} + \int_0^a P(a-x) (\frac{\ell}{2} - x) \frac{dx}{EI} + \int_0^{\ell/2} X (\frac{\ell}{2} - x)^2 \frac{dx}{EI} = 0$$

$$6 X \ell^2 h + 12 Pa \ell h + X \ell^3 + 6a^2 \ell P - 4a^2 P = 0$$

$$X = \frac{2Pa}{\ell^2} \frac{2a^2 - 3a\ell - 6\ell h}{6h + \ell}$$

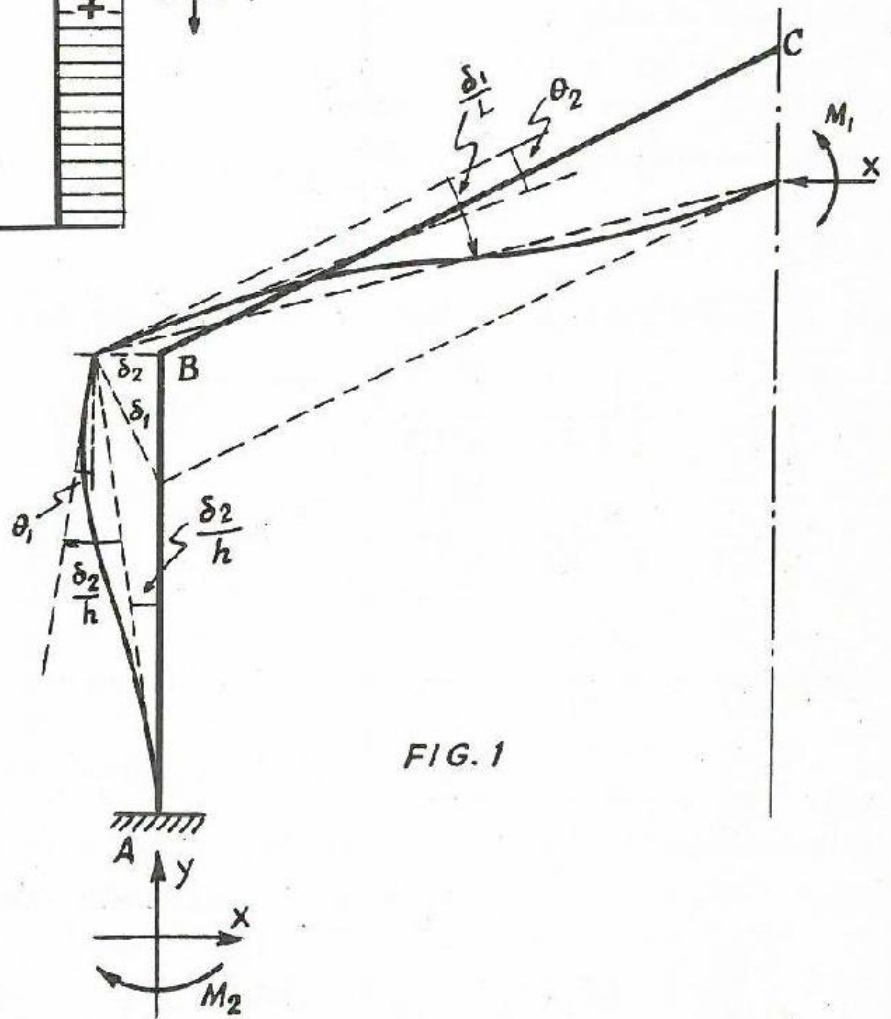
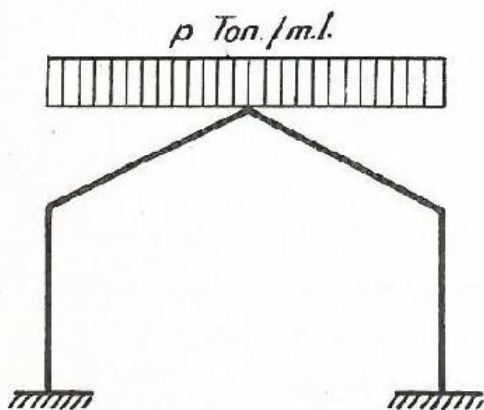
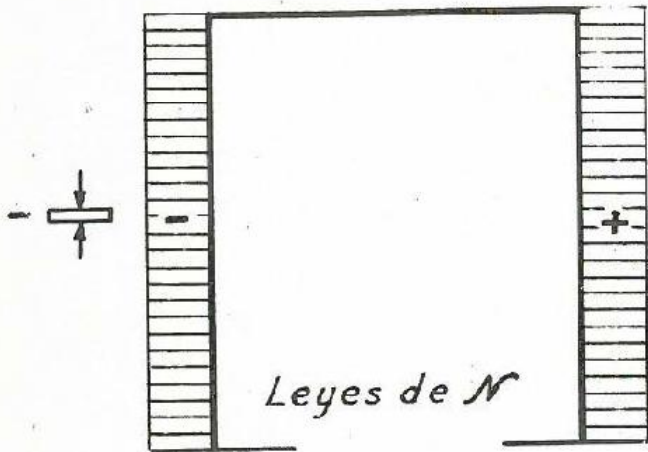
Conocido X, los valores característicos de cada una de las leyes de esfuerzos se deducen fácilmente.

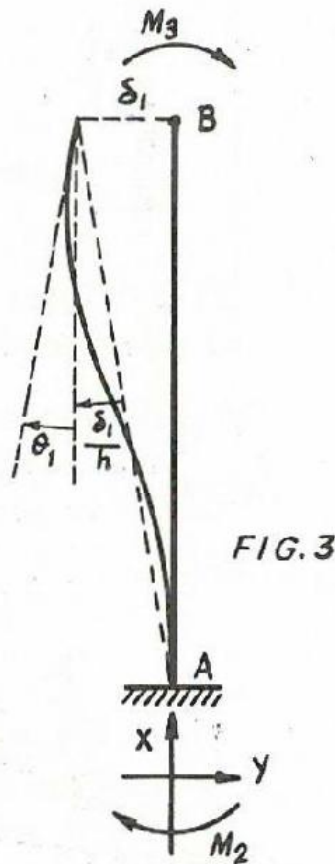
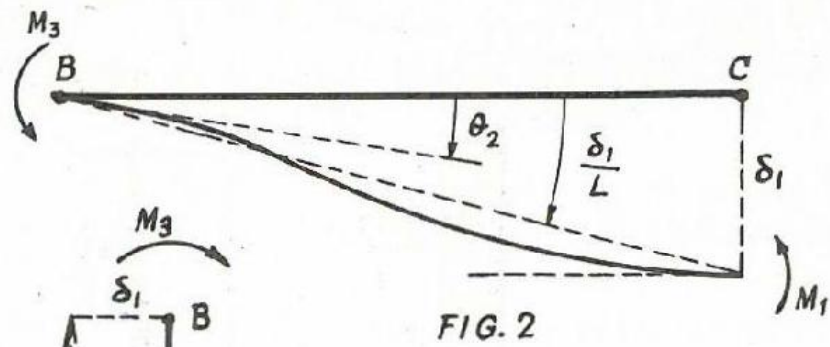




13. Determinar la ley de M_f en el pórtico de la figura.

19. Dibujamos la deformada, basándonos en condición de simetría y de carga.





Establecemos las ecuaciones de los giros:

(1)	$\frac{M_1 L}{3 EI} + \frac{PL^3}{24 EI} - \frac{M_3 L}{6 EI} = \frac{\delta_1}{L}$	Giro en C	} dintel
(2)	$\frac{M_3 L}{3 EI} - \frac{PL^3}{24 EI} - \frac{M_1 L}{6 EI} = \frac{\delta_1}{L} - \theta$	" " B	
(3)	$\frac{M_3 h}{3 EI} + \frac{M_2 h}{6 EI} = -\frac{\delta_2}{h} - \theta_1$	Giro en B	} soporte
(4)	$\frac{M_2 h}{3 EI} + \frac{M_3 h}{3 EI} = -\frac{\delta_2}{h}$	" " A	

$\theta_1 = \theta_2$. Igualando, tenemos:

$$\frac{M_3 L}{3 EI} - \frac{PL^3}{24 EI} - \frac{M_1 L}{6 EI} - \frac{\delta_1}{L} = -\frac{M_3 h}{3 EI} + \frac{M_2 h}{6 EI} + \frac{\delta_2}{h}$$

De la fig. (1)

$$\delta_2 = \delta_1 \operatorname{sen} \alpha \quad \text{ luego:}$$

$$(5) \quad \frac{M_3 L}{3 EI} - \frac{pL^3}{24 EI} - \frac{M_1 L}{6 EI} + \frac{M_3 h}{3 EI} - \frac{M_2 h}{6 EI} = \delta_1 \left(\frac{1}{L} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{h} \right)$$

Del equilibrio del dintel tenemos. Tomando momentos en B.

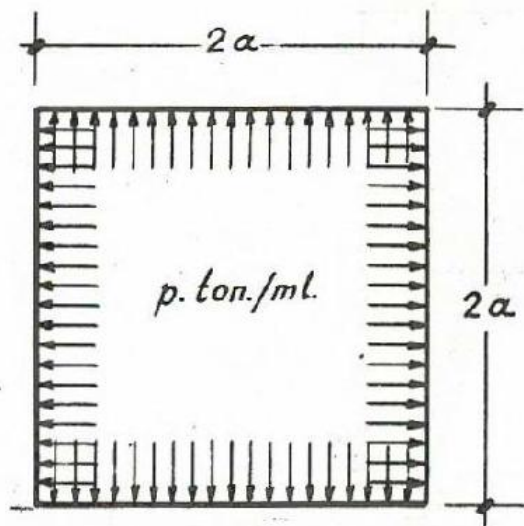
$$(6) \quad M_3 + M_1 + X h_1 - \frac{p \ell^2}{2} = 0$$

Del equilibrio de la mitad del pórtico, tomando momentos en A.

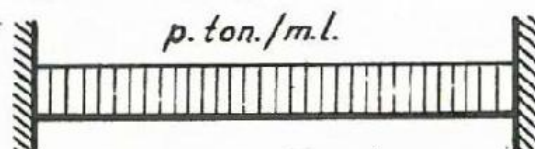
$$(7) \quad M_1 - M_2 + X (h + h_1) - \frac{p \ell^2}{2} = 0$$

(1), (4), (5), (6) y (7) → 5 ecuaciones
 $M_1, M_2, M_3, X, \delta_1$ → 5 incógnitas } → con lo que tenemos resuelto el pórtico.

14. Determinar las leyes de esfuerzos en la estructura adjunta. Despréciase la influencia del esfuerzo axial.



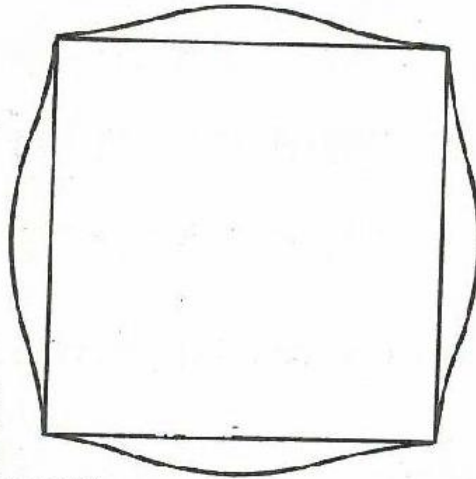
Como consecuencia de la simetría de figura y cargas los giros son nulos en todos los vértices, y basta por tanto, determinar la ley en la siguiente viga:



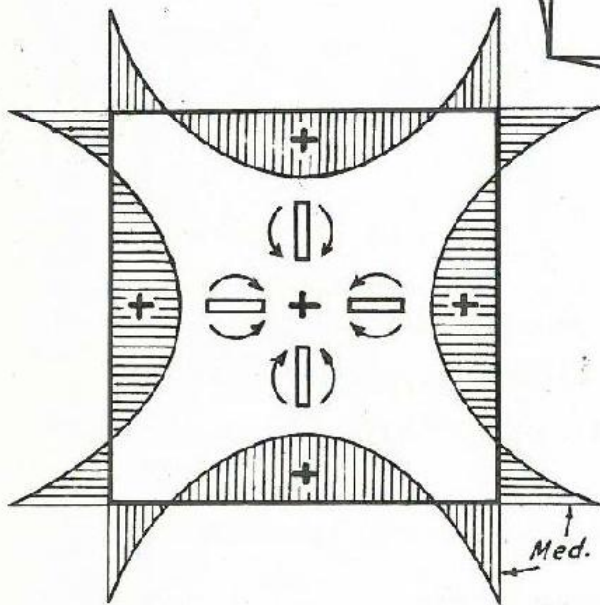
En la pág. 42 del núm. 100 del Torroja, tenemos:

$$M_{ed} = -\frac{pL^2}{12} \text{ " en nuestro caso } M_{ed} = \frac{p_o(2a)^2}{12} = \frac{p_o \cdot a^2}{3}$$

Deformada:



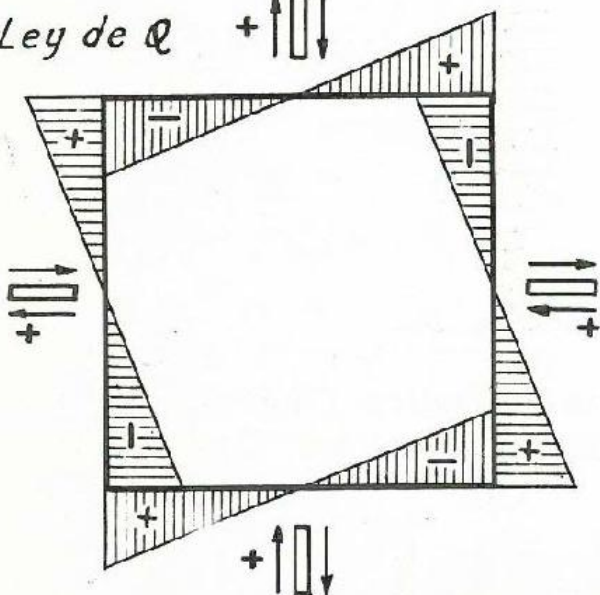
Ley de $M\phi$



Momento flector en el punto medio.

$$\begin{aligned} \frac{pa^2}{3} - \frac{p \cdot (2a)}{2} \cdot \frac{a}{2} &= \frac{pa^2}{3} - \frac{pa^2}{2} = \\ &= -\frac{Pa^2}{6} \end{aligned}$$

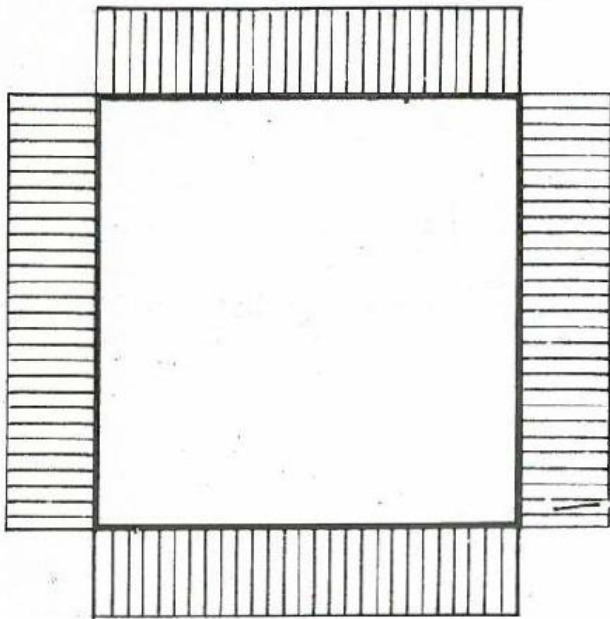
Ley de Q +



El cortante en las esquinas, valdrá:

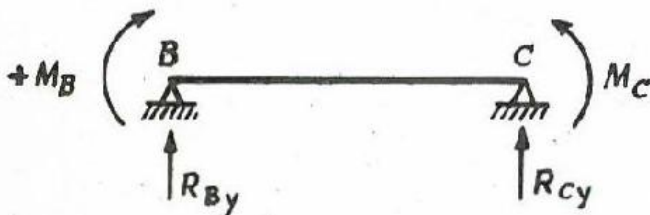
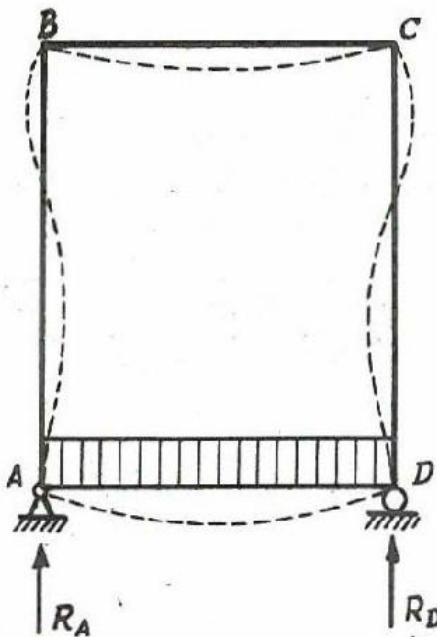
$$Q = P \cdot a$$

Ley de N



Los axiles en cada pieza serán las componentes correspondientes del cortante de las piezas - que se empotran en ella. Por tanto, todas las piezas estarán sometidas a tracción $N = p \cdot a$.

15. Calcular las reacciones y las leyes de M_f y Q .



Por la simetría de carga y de estructura:

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -M_D \\ M_B &= M_C \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Giros en los nudos A y B.

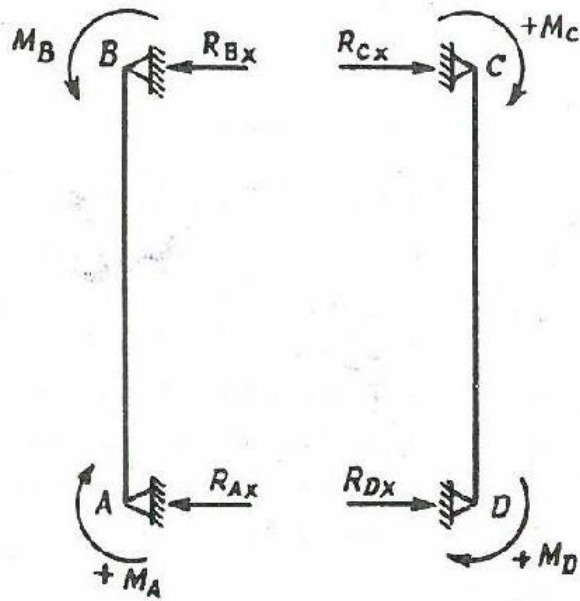
$$\omega_A = -\frac{P l^3}{24 EI} + \frac{M_A l}{3 EI} - \frac{M_D l}{6 EI}$$

$$\omega_A = -\frac{M_A h}{3 EI} - \frac{M_B h}{6 EI}$$

$$\omega_B = \frac{M_B h}{3 EI} + \frac{M_A h}{6 EI}$$

$$\omega_B = -\frac{M_B l}{3 EI} - \frac{M_C l}{6 EI}$$

Igualando los giros y teniendo en cuenta (I):

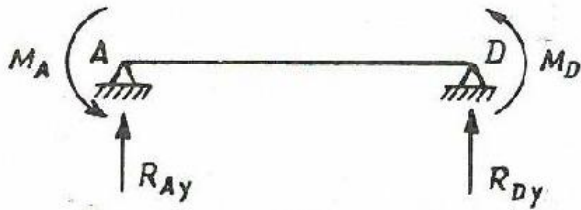


$$M_A = -M_D = -\frac{Pl^3}{4} \frac{3l+2h}{(3l+2h)^2 - h^2}$$

$$M_B = M_C = \frac{Pl^3}{4} \frac{h}{(3l+2h)^2 - h^2}$$

Reacciones:

$$R_{Ay} = \frac{Pl}{2} + \frac{1}{l} (M_A + M_B) = \frac{Pl}{2}$$



$$R_{Bx} = \frac{1}{h} (M_B - M_A) = \frac{3Pl^3}{4h} \cdot \frac{h+l}{(3l+2h)^2 - h^2}$$

$$R_{Cx} = -\frac{1}{h} [M_B - M_A] = -\frac{3Pl^3}{4h} \cdot \frac{h+l}{(3l+2h)^2 - h^2}$$

$$R_{By} = \frac{1}{l} [(M_C - M_B)] = 0$$

$$R_{ey} = -\frac{1}{l} [(M_C - M_B)] = 0$$

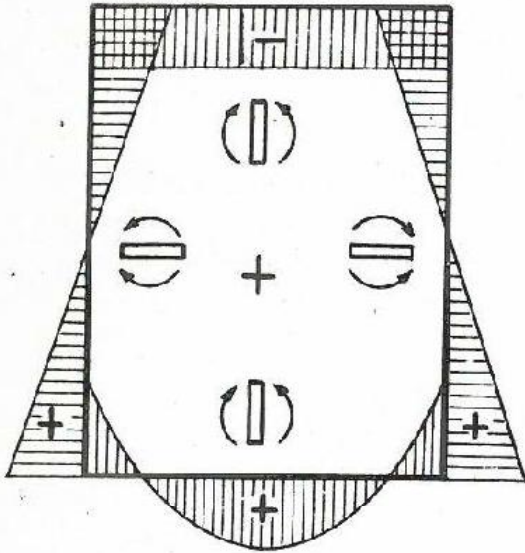
$$R_{ex} = -\frac{1}{h} [(M_C + M_D)] = -\frac{3Pl^3}{4h} \frac{h+l}{(3l+2h)^2 - h^2} = +R_{Bx}$$

$$R_{Dx} = \frac{1}{h} [M_C + M_D] = \frac{3Pl^3}{4h} \frac{h+l}{(3l+2h)^2 - h^2} = R_{Ax}$$

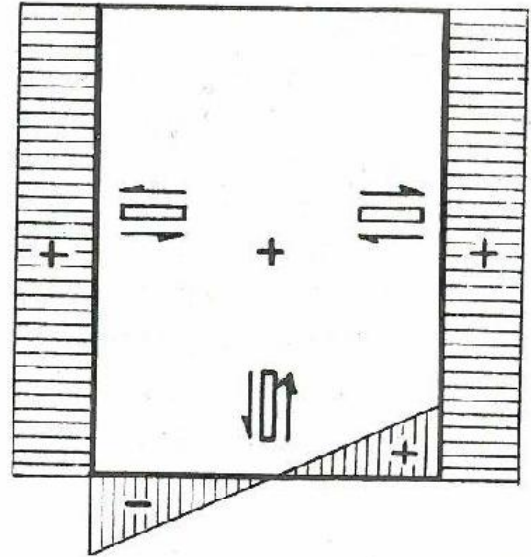
$$R_{Dy} = \frac{Pl}{2} - \frac{1}{l} (M_A + M_D) = \frac{Pl}{2}$$

Entonces, las leyes de M_f y Q y las reacciones, serán:

Ley de M_f



Ley de Q



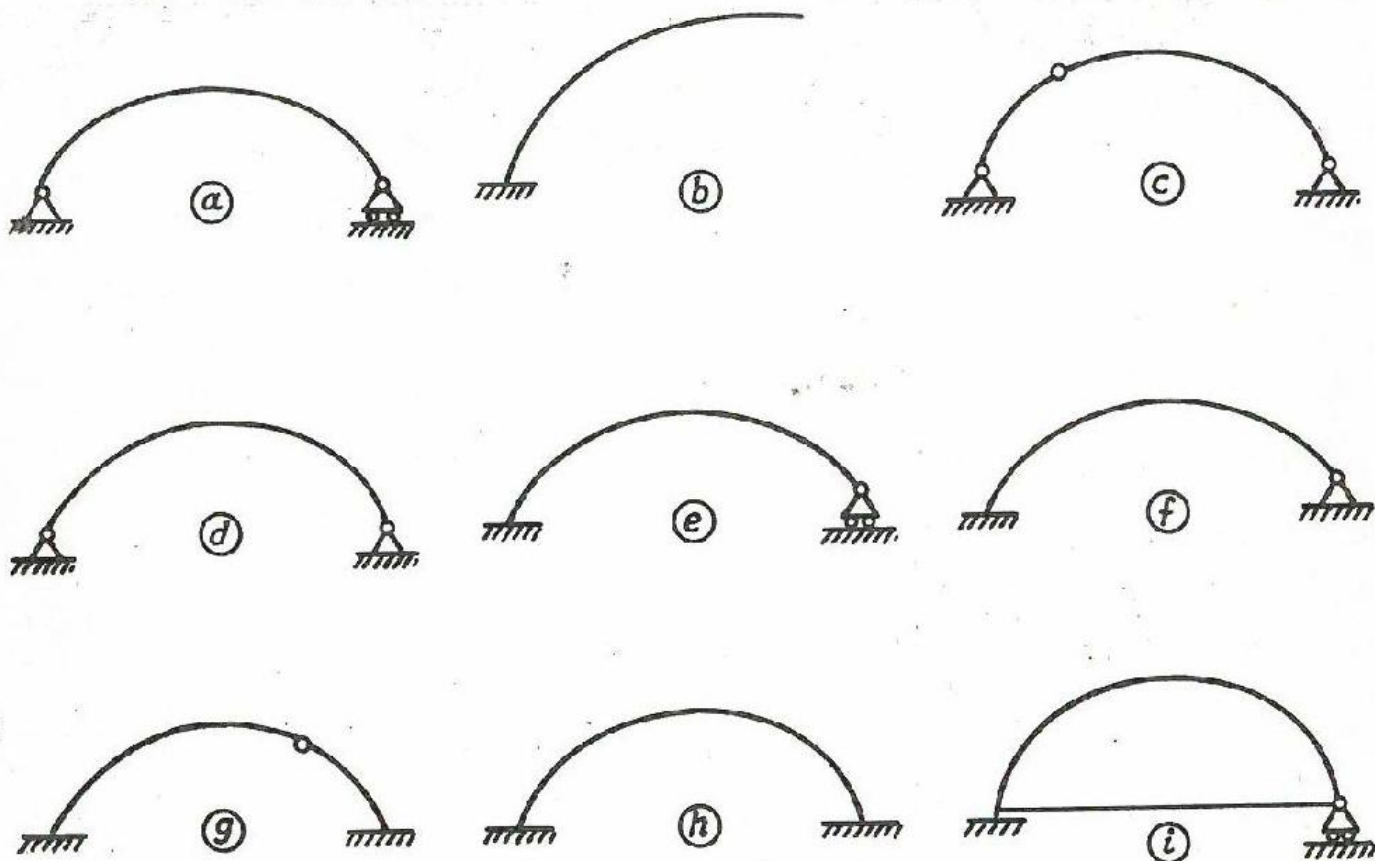
8-1. - PIEZAS CURVAS

8-2. - CENTRO ELASTICO

-o-

8-1. - PIEZAS CURVAS. - Entre las piezas curvas tenemos los arcos, los cuales los podremos clasificar en cuanto a su forma en circulares, parabólicos, catenoides, etc., y en cuanto a su sustentación podemos citar como más importantes:

- | | |
|------------------------|--------------------------------|
| a) Apoyado | f) Empotrado - articulado |
| b) En voladizo | g) Biempotrado con una rótula. |
| c) Triarticulado | h) Biempotrado |
| d) Biarticulado | g) Atirantado. |
| e) Empotrado - apoyado | |



Todo lo dicho para las piezas prismáticas es válido en el cálculo de arcos en lo que respecta a las hipótesis. Hemos de hacer notar además que el canto de la pieza ha de ser despreciable respecto al radio de curvatura y respecto a la longitud de la pieza. Los tipos (a), (b) y (c) son isostáticos, el resto hiperestático. Para ellos, por tanto, nos bastan las tres ecuaciones de

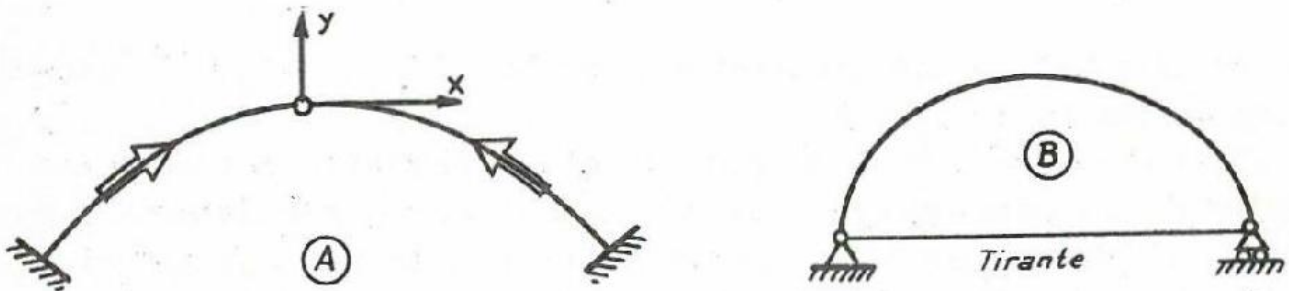
la estática para calcular las reacciones en los extremos, en el tipo (c), introducimos una cuarta ecuación que refleje que el momento flector en la rótula es nulo. Para los otros arcos hemos de recurrir, además de a las tres ecuaciones de la estática, a las deformaciones.

En resumen, son aplicables para las piezas curvas las mismas consideraciones que se han hecho al hablar de la pieza recta e igual que entonces, podremos utilizar el teorema de Castigliano para el cálculo de las deformaciones en cualquier sección de la estructura.

Cálculo de arcos: Métodos de las deformaciones.- En los arcos hiperestático el procedimiento a seguir es:

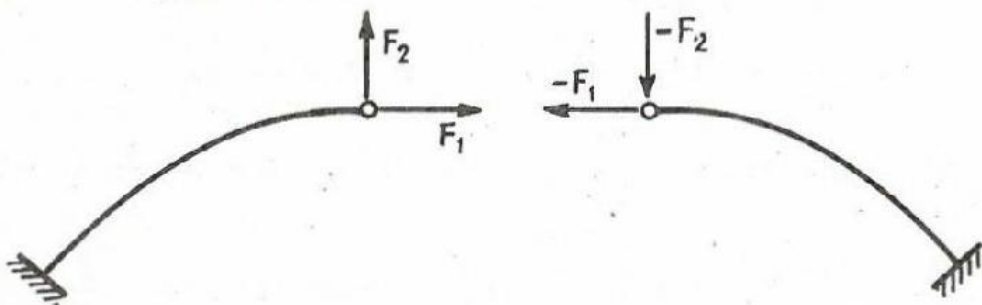
- 1) Se corta el arco en una sección quedando la parte izquierda como una ménsula.
- 2) Se calculan las deformaciones debidas a las fuerzas que actúan sobre dicha ménsula (Castigliano).
- 3) Imponemos unas reacciones que anulen las deformaciones.

Como ejemplos vamos a indicar el proceso de cálculo en los arcos de la figura.



En el A

- 1) Los ejes se ponen en la articulación.



- 2) Los sentidos de avance se encuentran en la articulación.
- 3) En la rótula solo actúan fuerzas horizontales y verticales, no hay momento.
- 4) Descomponemos el arco en dos ménsulas curvas.
- 5) En dichas ménsulas se estudian los corrimientos verticales y horizontales que igualaremos los de una a los de la otra - ménsula.
- 6) Si una fuerza P actúa en la rótula la descomponemos en X sobre una ménsula y en P-X en la otra.

En el B

Por el método de superposición.

- 1) Se prescinde del tirante con lo que el arco es isostático y en él se calculan las reacciones, y ley de momentos flectores, teniendo en cuenta las fuerzas exteriores.
- 2) Sin tener en cuenta las fuerzas exteriores, poniendo dos fuerzas unidad iguales y contrarias. En este estado se calcula la ley de momentos.



El estado final de momentos será $M = M_1 + \lambda M_2$ y de esfuerzos axiales $N_1 + \lambda N_2 = N$.

En este estado final se calcula el corrimiento del extremo frontal con respecto al dorsal y este corrimiento deberá ser igual al alargamiento del tirante que si éste es de longitud l - sección S y módulo de elasticidad E . El alargamiento será:

$$\frac{\lambda l}{E \cdot S}$$

Luego:

$$-\frac{\lambda l}{ES} = \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial \lambda} d\varphi + \int N \frac{\partial N}{\partial \lambda} d\epsilon$$

Los arcos tendrán como ecuación de su directriz $y = f(x)$, como

$$d\varphi = \frac{ds}{EI} \quad ds = \sqrt{1+y'^2} dx, \quad \text{resulta} \quad d\varphi = \frac{dx}{EI} \sqrt{1+y'^2}$$

Podremos hacer $ds = dx$ para simplificar la integración cuando la relación:

$$\frac{\text{Flecha}}{\text{luz}} \leq \frac{1}{5}$$

En los arcos poco rebajados $\frac{f}{l} > \frac{1}{3}$ el trabajo que más importancia tiene es el de flexión y, por lo tanto, despreciando el trabajo debido a la compresión podemos para calcular las reacciones aplicar el método de Müller-Breslau.

-o-

8-2. CENTRO ELASTICO. - Para determinar las tres reacciones de apoyo \bar{X} , \bar{Y} , \bar{M} , de una pieza biempotrada, vamos a tener que plantear y resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, expresadas en la fórmula (52.7) del Torroja, lo cual resulta muy laborioso.

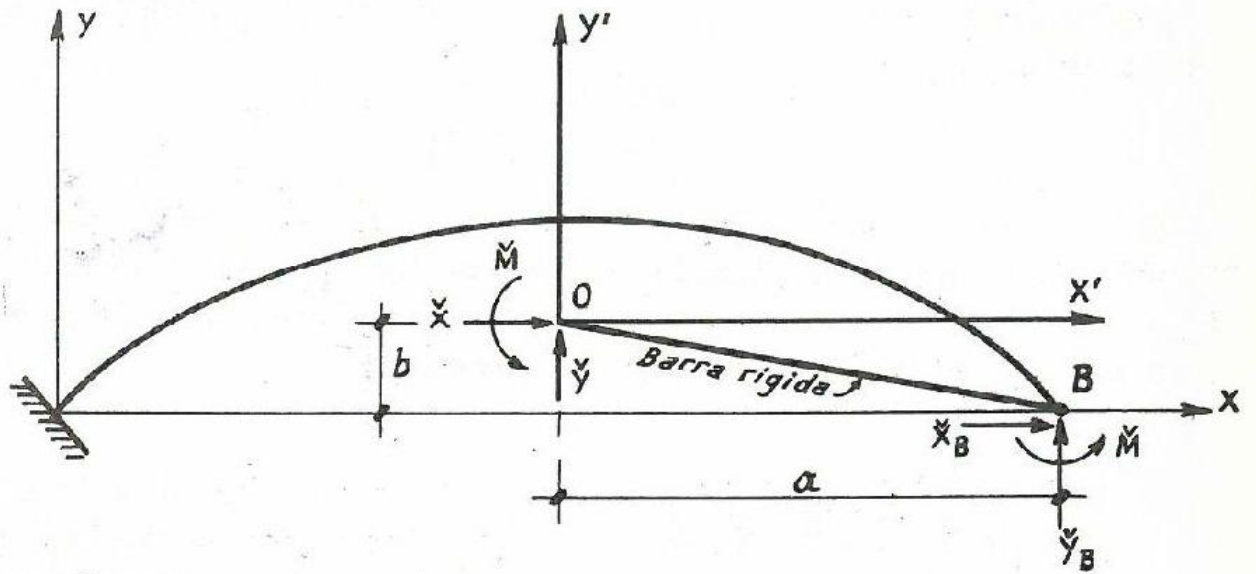
Esto ocurre, porque para cada expresión de un movimiento u , v , ω , del extremo de la pieza nos aparecen las tres reacciones de apoyo, \bar{X} , \bar{Y} , \bar{M} .

Pero si prolongamos la pieza en su extremo frontal, por ejemplo, mediante una barra infinitamente rígida ($E = \infty$), hasta un punto, llamado centro elástico, que cumpla las condiciones:

$$\int_{ed}^{ef} x \, d\varphi = 0 \quad \int_{ed}^{ef} y \, d\varphi = 0 \quad (I)$$

y, en este punto, colocamos los nuevos ejes coordenados a los que referimos toda la pieza, las nuevas ecuaciones hiperestáticas (obtenidas haciendo nulos los movimientos del extremo 0 de la barra rígida) quedan muy simplificadas, pues en la expresión de u (corrimiento horizontal del centro elástico) solo aparecen la reacción \bar{X} , análogamente v es función únicamente de \bar{Y} y ω lo es de \bar{M} (siendo v y ω corrimiento del centro elástico). Estas nuevas ecuaciones hiperestáticas son las (53, 2) de la monografía 103 de Torroja).

Hay que fijarse que con las expresiones (53, 2) obtendremos los valores \bar{X} , \bar{Y} , \bar{M} , pero en el extremo 0 de la barra rígida y que las reacciones en el empotramiento B, que es lo que tratamos de encontrar, están relacionados con aquellos valores por



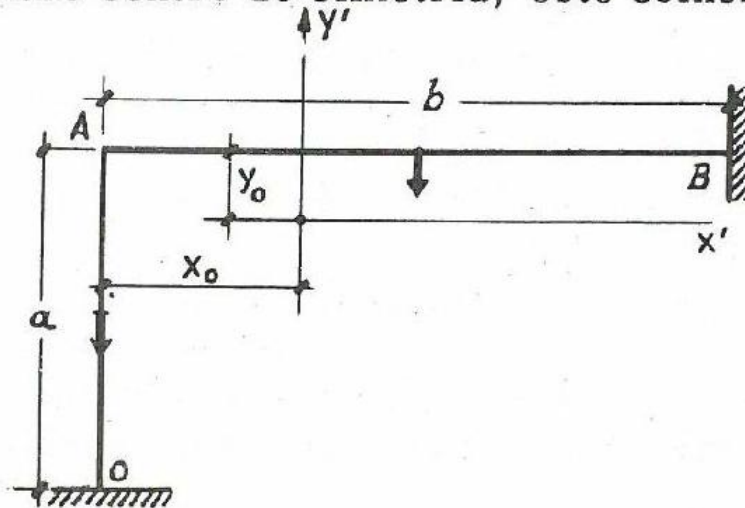
las ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{X}_B &= \bar{X} \\ \bar{Y}_B &= \bar{Y} \\ \bar{M}_B &= \bar{M} - \bar{X} \cdot b - \bar{Y} \cdot a \end{aligned}$$

Las condiciones (1) puestas en la forma:

$$\int_{ed}^{ef} \frac{1}{EI} \cdot x \, ds = 0 ; \int_{ed}^{ef} \frac{1}{EI} \cdot y \, ds = 0$$

nos indican que el centro elástico coincide con el centro de gravedad de la pieza, supuestas distribuidas, sobre el eje de la misma unas masas ficticias, de valor $1/EI$ por unidad de longitud. En el caso de que el valor $1/EI$ sea constante, si la pieza tiene un eje de simetría, el centro elástico está sobre dicho eje, y si la pieza tiene centro de simetría, éste coincide con el centro elástico.



Como aplicación, vamos a calcular el centro elástico de la estructura adjunta, de sección constante.

Bastará calcular el centro de gravedad supuesta una masa de valor $1/EI$ por unidad de longitud. Así que:

$$\frac{1}{EI} \cdot a \cdot x_0 - \frac{1}{EI} \cdot b \left(\frac{b}{2} - x_0 \right) = 0$$

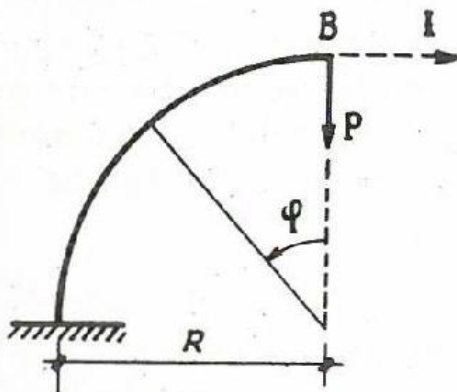
$$\left(\frac{a}{2} - y_0 \right) \frac{1}{EI} a - \frac{1}{EI} b \cdot y_0 = 0$$

y obtenemos:

$$x_0 = \frac{b^2}{2(a+b)}$$

$$y_0 = \frac{a^2}{2(a+b)}$$

Ejemplo 2. Determinar los corrimientos horizontal y vertical en el extremo B del cuadrante de circunferencia de la figura, sometida a la fuerza vertical P aplicada en B.



Por tratarse de una pieza delgada en la que las dimensiones de sección recta son pequeñas comparadas con el radio, podemos aplicar el siguiente método de cálculo.

Corrimiento vertical:

$$M_f^I = -PR \operatorname{sen} \varphi; \quad \frac{\partial M_f^I}{\partial P} = -R \operatorname{sen} \varphi$$

$$v_B = \int_0^{\pi/2} + PR \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot R \operatorname{sen} \varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} PR^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \frac{R d\varphi}{EI}$$

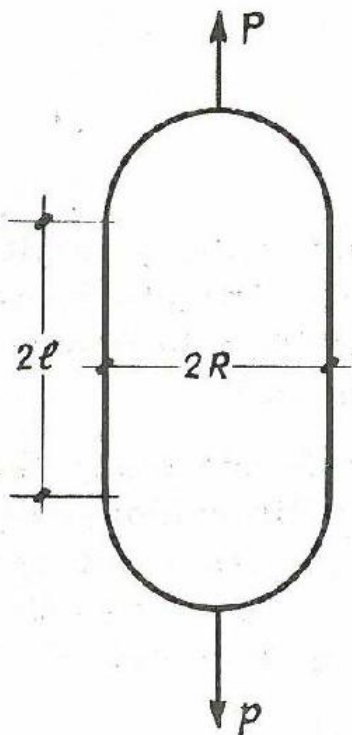
$$v_B = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{PR^3}{EI}$$

Corrimiento horizontal:

$$M_f^{II} = 1. (R - R \cos \varphi) = R (1 - \cos \varphi)$$

$$u_B = \int_0^{\pi/2} -PR^2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi) \cdot \frac{R d\varphi}{EI} = -\frac{PR^3}{2EI}$$

Ejemplo 3.



Determinar para la pieza de la figura solicitada por dos fuerzas P opuestas el máximo momento flector. Se supone que las dimensiones de la pieza son pequeñas comparadas con el radio R.

Por la simetría existente podremos considerar únicamente un cuadrante. También por simetría se ve que el esfuerzo cortante en B tiene que ser nulo y, por tanto, en B tendremos como fuerzas exteriores un momento M y una fuerza de valor P/2.

Sólo hay una incógnita: el valor de M que lo hallaremos obligando a que el giro de B sea nulo, ya que la tangente después de la deformación tiene que continuar siendo vertical.

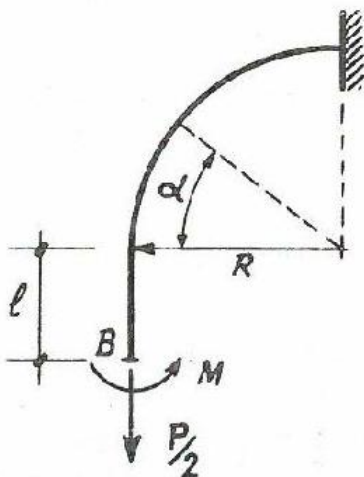
El momento flector entre 0 y (parte recta) es:

$$M_f \Big|_0^l = -M$$

y para el resto:

$$M_f \Big|_0^{\pi/2} = -M - \frac{P}{2} R (1 - \cos \varphi)$$

$$\omega = 0 = \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} d\varphi$$



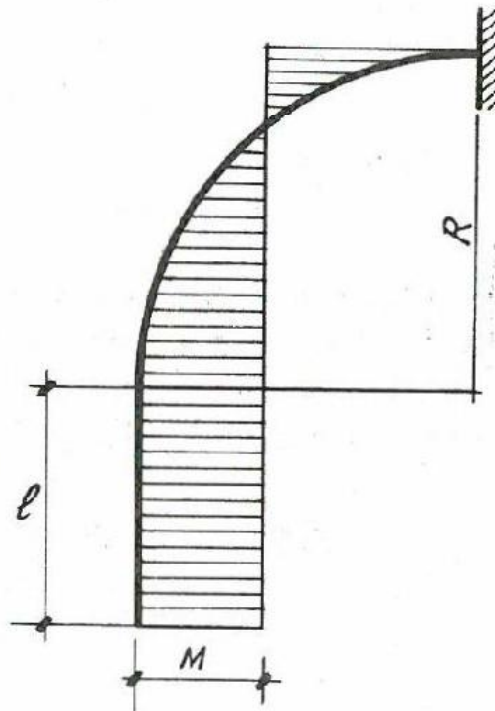
Así que:

$$\omega = 0 = \int_0^{\ell} -M \cdot (-1) \frac{ds}{EI} + \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{P}{2} R(1 - \cos\alpha) - M \right] \frac{R d\alpha}{EI} =$$

$$= \frac{M\ell}{EI} + \frac{PR^2}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{MR\pi}{2EI} = 0$$

$$M = -\frac{PR^2}{2} \cdot \frac{\pi - 2}{2\ell + R\pi}$$

La ley de M_f es:



y el M_f máximo será:

$$M_{f \text{ máx.}} = -M - \frac{PR}{2} = \left[\frac{R(\pi - 2)}{2\ell + R\pi} - 1 \right] \cdot \frac{PR}{2}$$

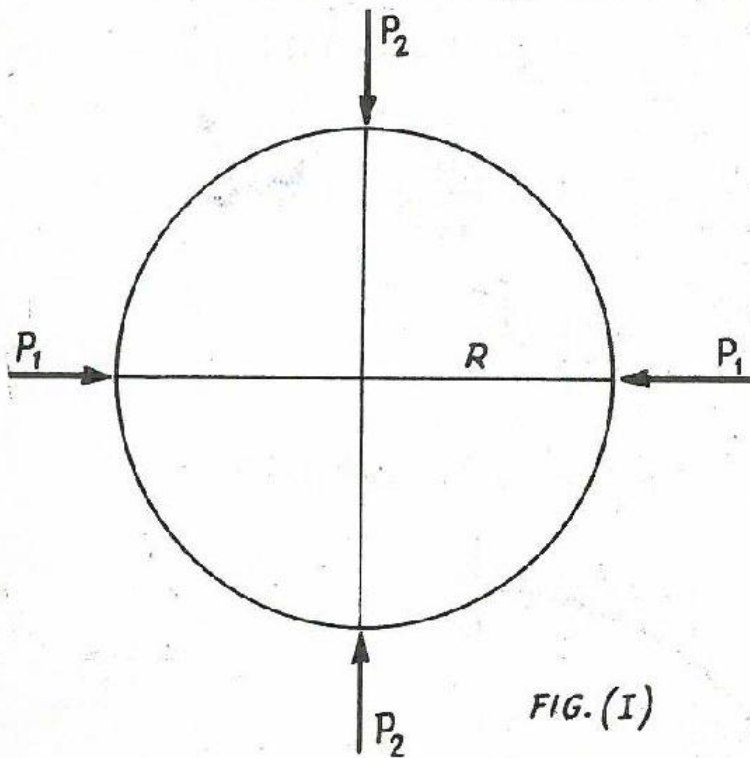
Ejemplo 4.

La figura es un anillo sobre el que actúan las fuerzas P_1 y P_2 como se representan en el esquema

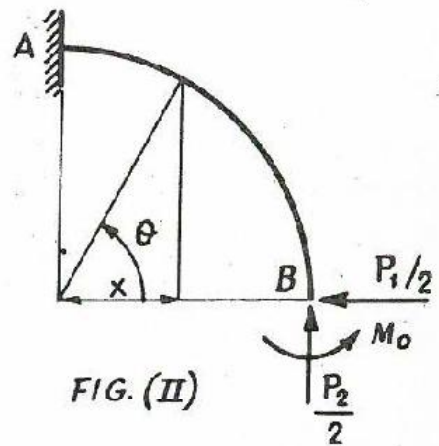
Calcular:

a) Ley de M_f y Q .

b) Variación longitudinal del diámetro horizontal.



Podemos considerar un cuadrante de la pieza dada.



Por la simetría de cargas y de forma de la pieza el esfuerzo cortante en la sección B es nulo y el giro relativo de B con respecto a A es también nulo, pues en la deformación ambas secciones permanecen perpendiculares, luego

$$\frac{\partial u}{\partial M_o} = 0 \text{ en la sección B, es decir, } \omega_B = 0.$$

En una sección cualquiera:

$$M_f = M_o + (R-x) \frac{P_2}{2} - R \operatorname{sen} \theta \frac{P_1}{2} \quad x = R \cos \theta; \quad d\varphi = \frac{R \cdot d\theta}{EI}$$

$$\omega_B = \int_0^{\pi/2} M_f \cdot \frac{\partial M_f}{\partial M_o} \frac{R \cdot d\theta}{EI} = 0 \quad \text{como } \frac{\partial M_f}{\partial M_o} = 1, \text{ resulta:}$$

$$\int_0^{\pi/2} \left[M_o + R(1-\cos \theta) \frac{P_2}{2} - R \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{P_1}{2} \right] \frac{R}{EI} d\theta \quad \text{de donde:}$$

$$M_o = \frac{R}{2\pi} [2P_1 + P_2(2-\pi)]$$

Entonces

$$M_f = \frac{R}{2} (P_1 + P_2) - \frac{R}{2} (P_1 \operatorname{sen} \theta + P_2 \operatorname{cos} \theta)$$

$$Q = - \frac{\partial M_f}{\partial S} = - \frac{1}{R} \frac{\partial M_f}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (P_1 \operatorname{cos} \theta - P_2 \operatorname{sen} \theta)$$

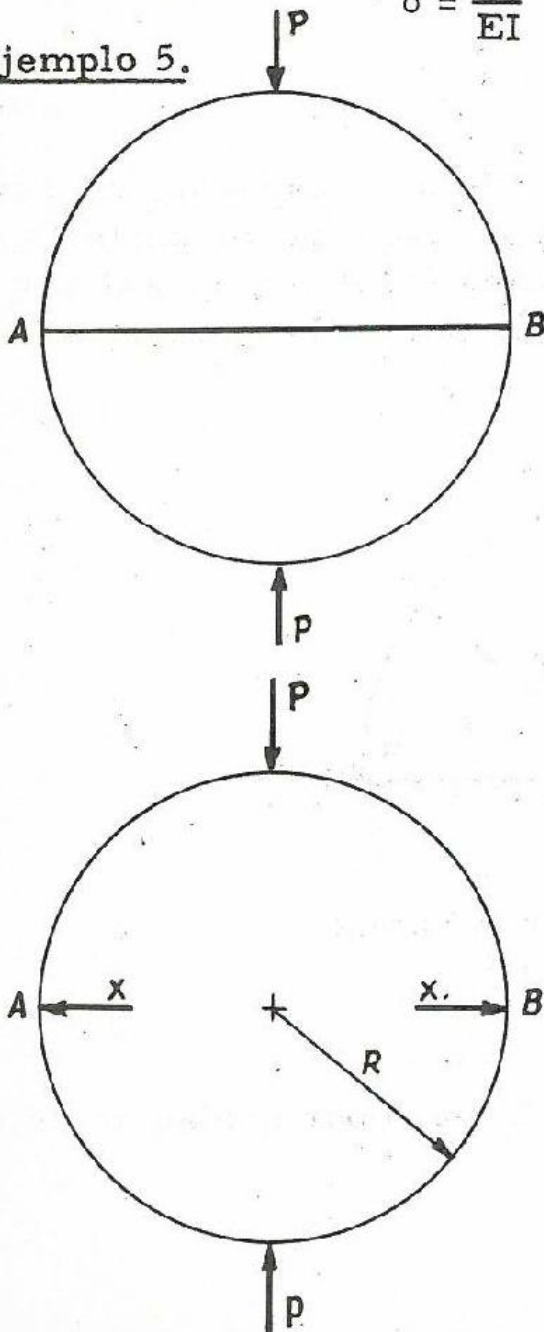
La variación del diámetro horizontal será:

$$\delta = 4 \frac{\partial u}{\partial P_1} \quad (u = \text{energía elástica})$$

Obtenemos:

$$\delta = \frac{R^3}{EI} \frac{2 P_2 (4 - \pi) - P_1 (\pi^2 - 8)}{4 \pi}$$

Ejemplo 5.



Un anillo elástico, de radio R, arriostrado con un tirante diámetro AB, está sometido a la acción de las fuerzas P. Determinar la tracción del tirante y el alargamiento entre los puntos A y B.

Si sustituimos el tirante \overline{AB} por la acción que ejerce sobre el anillo, podremos utilizar los resultados del ejemplo anterior, sin más que hacer

$$P = P_2 \quad \text{y} \quad X = P_1$$

Entonces la variación del diámetro AB será:

$$\delta = \frac{R^3}{EI} \left[\frac{2P(4 - \pi) - X(\pi^2 - 8)}{4\pi} \right]$$

y el alargamiento del tirante (si es del mismo material que el anillo y de sección Ω), será:

$$\frac{x}{\Omega} = E \cdot \frac{\delta}{AB}, \quad \text{o sea: } \delta = \frac{2RX}{E}$$



y, entonces, igualando estos dos valores y despejando X se obtiene:

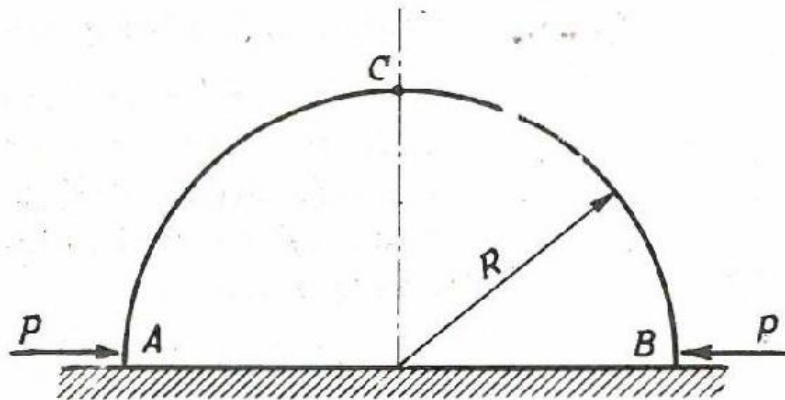
$$X = \frac{2 P (4 - \pi)}{(\pi^2 - 8) + \frac{8 \pi I}{\Omega R^2}}$$

Conocido X el alargamiento del diámetro \overline{AB} se calcula por la expresión:

$$\delta = \frac{2RX}{E \Omega}$$

Ejemplo 6.

Una plancha semicilíndrica pesada, de poco espesor, reposa sobre un plano horizontal perfectamente liso. En los puntos A y B han de actuar dos fuerzas horizontales P que impidan el aumento de diámetro \overline{AB} provocado por el peso. Calcular el valor de las fuerzas P. (Wittembauer).



Las reacciones verticales en A y en B valen:

$$F = \frac{G}{2}$$

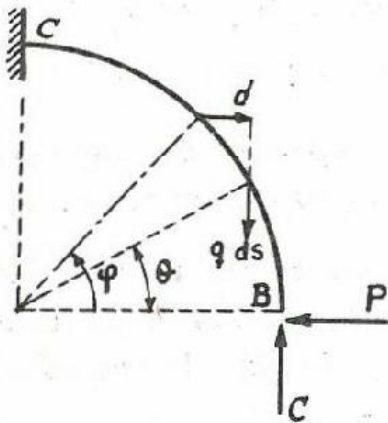
siendo G el peso total de la plancha. El peso por unidad de arco es:

$$q = \frac{G}{\pi r}$$

Como la tangente en C después de la deformación continua siendo horizontal por la simetría existente, podemos considerar sólo un cuadrante de la plancha, que estará empotrado en C y sometido a las fuerzas P y G en B y al peso propio.

El momento flector producido en la sección φ por el peso propio, será:

$$M_q = \int_0^\varphi q \cdot ds \cdot d = \int_0^\varphi q \cdot R(\cos\varphi - \cos\vartheta) \cdot R d\vartheta = \\ = q R^2 (\text{sen}\varphi - \varphi \cdot \cos\varphi)$$



y el momento flector total en la sección φ será:

$$M_f^I = GR(1 - \cos\varphi) - PR \text{sen}\varphi + qR^2(\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi)$$

Obligando ahora a que el corrimiento horizontal u de B, sea cero obtendremos:

$$u = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f^I \frac{\partial M_f^I}{\partial P} d\varphi = 0$$

de donde
$$\frac{\partial M_f^I}{\partial P} = -R \text{sen}\varphi \quad \text{y} \quad d\varphi = \frac{ds}{EI} = \frac{R \cdot d\varphi}{EI}$$

Haciendo la integral, obtenemos:

$$P = \frac{G}{2\pi}$$

lo que se ha movido hacia arriba o hacia abajo, el punto C de la plancha se obtendría calculando:

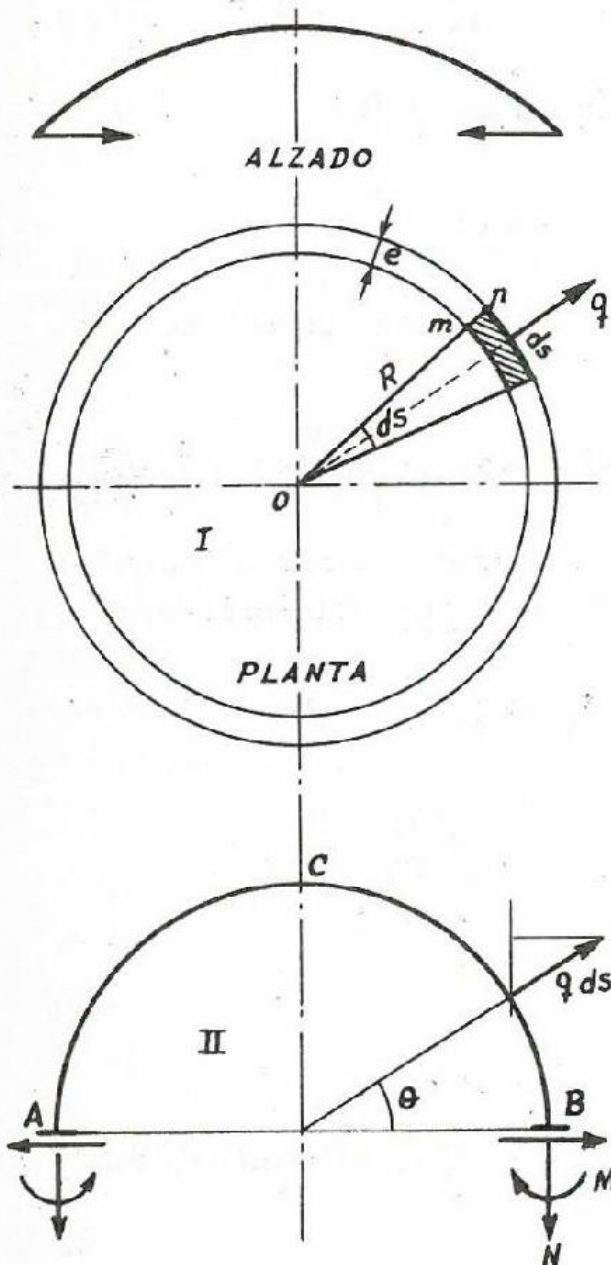
$$v = \int_0^{\pi} M_f^I M_f^{II} d\varphi$$

siendo en este caso el influjo unidad en la dirección vertical. Así que, el valor de M_f^{II} es:

$$M_f^{II} = R(1 - \cos\varphi)$$

Ejemplo 7.

Una cubierta laminar rebajada que se asienta sobre un anillo circular de radio R y sección rectangular, transmite al anillo un empuje horizontal de 2 Tn. por unidad de longitud.



Determinar el esfuerzo que soporta el anillo.

Si $q = 2 \text{ Tn.}$ es la fuerza que la cubierta ejerce sobre el anillo por unidad de longitud, sobre un elemento diferencial ds , será:

$$q ds = q R d\theta$$

Suponemos el espesor e despreciable frente al radio de curvatura.

Si efectuamos un corte por el diámetro AB sobre dichas secciones extremas actuarán las fuerzas representadas.

Como la pieza es simétrica en forma y cargas se nos anularán Q y M actuando sobre la sección únicamente el esfuerzo axial N .

Veamos que $Q = 0$. Si nos move-mos de B a C y de A hacia C en la rebanada C los esfuerzos cort-tes tienen en la parte dorsal y frontal de la rebanada el mismo signo lo que solo es posible si $Q = 0$.

En la rebanada C los momentos producirían giro de una cara respecto de otra y debido al tipo de carga al que está sometido el anillo - vemos que la sección mn sufre una deformación según la dirección del radio mO pero no un giro lo que sucedería si en esa sección actuara un momento luego $M = 0$.

Tenemos entonces que poniendo el equilibrio del sistema de la

figura II.

$$2 N = - q R \int_0^{\pi} \text{sen } \vartheta \, d\vartheta = 2 R q \quad N = \frac{2 R q}{2}$$

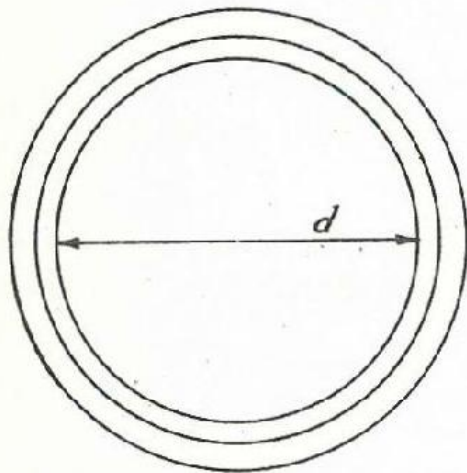
Como $q = 2 T_n$

$$N = 2 R T_n.$$

Ejemplo 8.

Dos anillos concéntricos, de acero el exterior de espesor e_a y de cobre el interior de espesor e_c , ajustan perfectamente sin coaccionarse mutuamente. Se ejerce interiormente una presión hidrostática de $p \text{ Kg/cm}^2$.

Calcular el reparto de tensiones en cada anillo.



Los módulos de elasticidad del acero y el cobre son E_a y E_c respectivamente.

Según vimos en el problema anterior - la fuerza total de extensión en el anillo será, siendo $p \text{ Kg/cm}^2$ la presión interna.

$$P = \frac{p \cdot d}{2} ; \quad (1)$$

(Despreciamos el espesor frente al diámetro de los anillos).

Los alargamientos circunferenciales en los anillos de acero y cobre son iguales, las tensiones están en relación de los módulos de elasticidad.

La tensión del cobre será los E_c/E_a de la del acero.

Sea P_1 la parte P correspondiente al anillo de cobre y P_2 al acero

$$P_1 + P_2 = P$$

En el cobre $\sigma_c = \frac{P_1}{e_c}$ siendo e_c el espesor del anillo de cobre.

En el acero

$$\sigma_a = \frac{P_2}{e_a}$$

En ambos anillos consideremos una altura de cilindro, formando por dichos cilindros, de 1 cm.

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_a}{E_a} \quad \sigma_a = \frac{E_a}{E_c} \sigma_c$$

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \sigma_a e_a \\ P_1 &= \sigma_c e_c \end{aligned} \right\} \frac{E_a}{E_c} \sigma_c e_a + \sigma_c e_c = P$$

Entonces

$$\sigma_c = \frac{P}{\frac{E_a e_c}{E_c} + e_c} \quad (2)$$

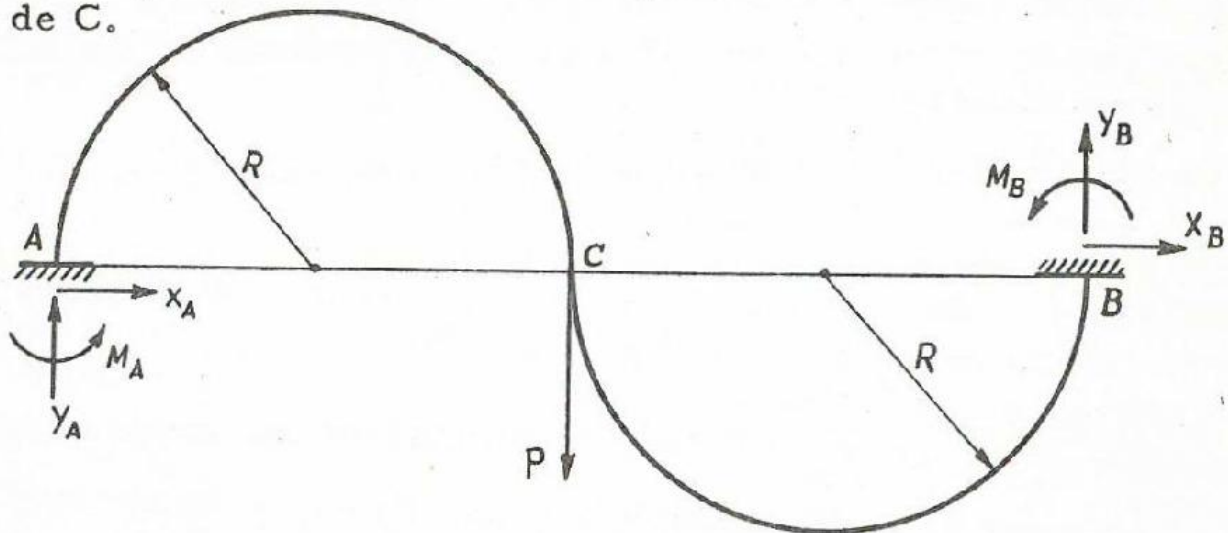
$$\sigma_a = \frac{P}{\frac{E_a e_a}{E_c} + E_c e_c} \quad (3)$$

Entrando con (1) en (2) y (3) como conocemos e_a , e_c tendremos las tensiones en los anillos función del módulo de elasticidad.

-o-

Ejemplo 9.

Una varilla elástica y delgada ACB, como indica la figura, tiene en su punto C una fuerza aplicada P. Calcular el descenso de C.



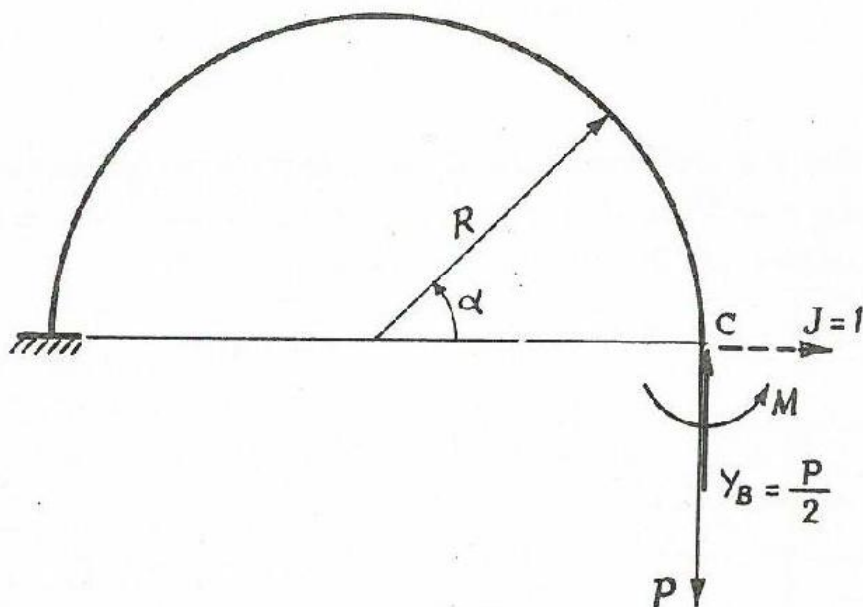
Por la simetría existente respecto del punto C resulta que:

$$X_A = X_B = 0.$$

Del equilibrio de fuerzas verticales, resulta;

$$Y_A = Y_B = \frac{P}{2}$$

Considerando unicamente el semicírculo AC calcularemos la



única incógnita M con la condición de que el corrimiento horizontal del punto C debe ser nulo por razones de simetría.

La expresión del M_f^I , será:

$$M_f^I = M - \frac{P}{2} R (1 - \cos \alpha)$$

y la expresión de M_f^{II} :

$$M_f^{II} = 1 \cdot R \operatorname{sen} \alpha$$

Así que:

$$u = 0 \int_0^\pi \left[M - \frac{P}{2} R (1 - \cos \alpha) \right] \cdot 1 \cdot R \operatorname{sen} \alpha \frac{R d\alpha}{EI}$$

queda;:

$$\frac{2MR^2}{EI} - \frac{PR^3}{EI} = 0 \quad \text{y} \quad M = \frac{PR}{2}$$

y el descenso del punto C, será:

$$v = \int_0^{\pi} \left[M - \frac{P}{2} R (1 - \cos \alpha) \right] \left[-1R(1 - \cos \alpha) \right] \frac{R d\alpha}{EI} =$$

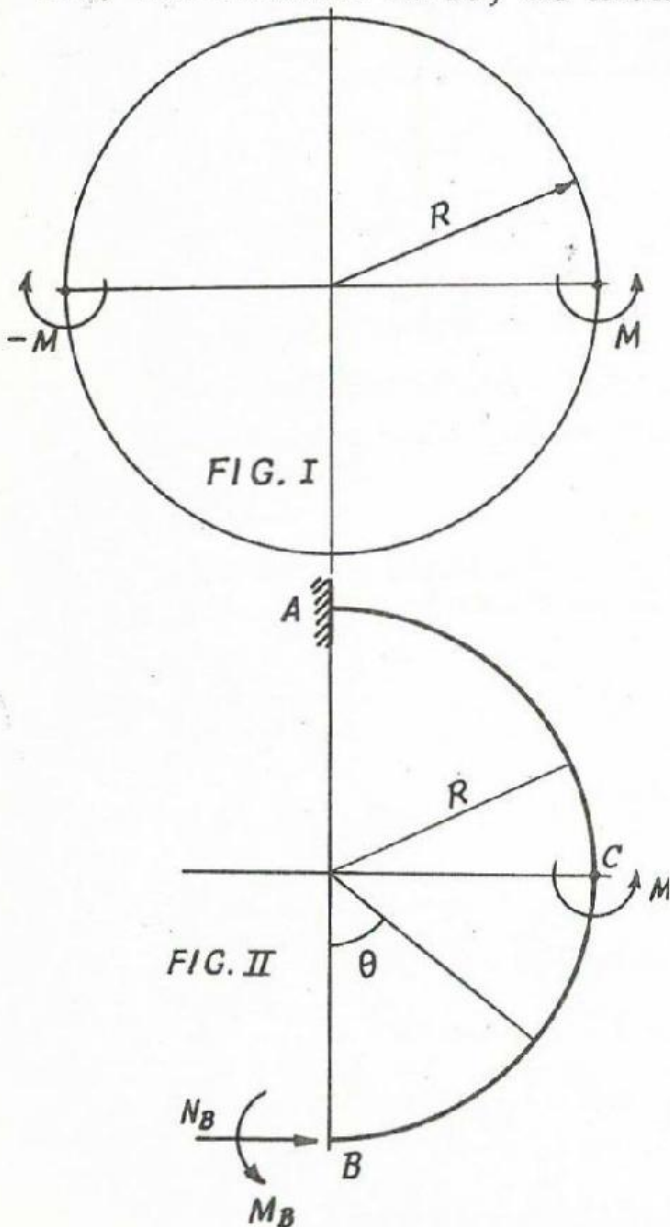
$$= - \frac{PR^3}{2EI} \cdot \pi + \frac{PR^3}{2EI} \left(\pi + \frac{1}{2}\pi \right) =$$

Luego

$$\underline{\underline{v = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{PR^3}{EI}}}$$

Ejemplo 10.

Sobre los extremos del diámetro horizontal de un anillo circular actúan dos momentos iguales y de signo contrario. Determinar la ley de momentos flectores.



Sustituimos el sistema de la figura I por el de la figura II.

El extremo A empotrado y el B libre. En el extremo B actúa un momento M_B y un esfuerzo axial N_B el cortante en B es nulo.

Por un punto entre B y C

$$M_f \Big|_C^B = (R - R \cos \theta) N_B + M_B \quad (1)$$

Por un punto entre C y A.

$$M_f \Big|_A^C = M_B + M + (R - R \cos \theta) N_B \quad (2)$$

Como condiciones tendremos

I) El corrimiento horizontal (según la dirección de N_B) es nulo en el punto B.

2) La sección B no gira. $\omega_B = 0$.

$$u_B = 0 = \int_0^{\pi/2} M_f|_C^B \frac{\partial M_f|_C^B}{\partial N_B} d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} M_f|_A^C \frac{\partial M_f|_A^C}{\partial N_B} d\varphi = 0 \quad (1)$$

$$\omega_B = \int_0^{\pi/2} M_f|_C^B \frac{\partial M_f|_C^B}{\partial M_B} d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} M_f|_A^C \frac{\partial M_f|_A^C}{\partial M_B} d\varphi = 0 \quad (2)$$

Con la expresión (1), tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} [R N_B (1 - \cos\vartheta) + M_B] R (1 - \cos\vartheta) \frac{R}{EI} d\vartheta +$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} [M_B + M + R (1 - \cos\vartheta) N_B] (1 - \cos\vartheta) R^2 \frac{d\vartheta}{EI} = 0$$

$$\frac{3\pi}{2} [R N_B + \pi M + \frac{\pi+2}{2} M_B] = 0 \quad \boxed{3\pi R N_B + 2\pi M + (\pi+2)M_B = 0} \quad (3)$$

Con la expresión (2), tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} [R N_B (-\cos\vartheta) + M_B] \frac{R d\vartheta}{EI} + \int_{\pi/2}^{\pi} R [M_B + M + R N_B (1 - \cos\vartheta)] \frac{d\vartheta}{EI} = 0$$

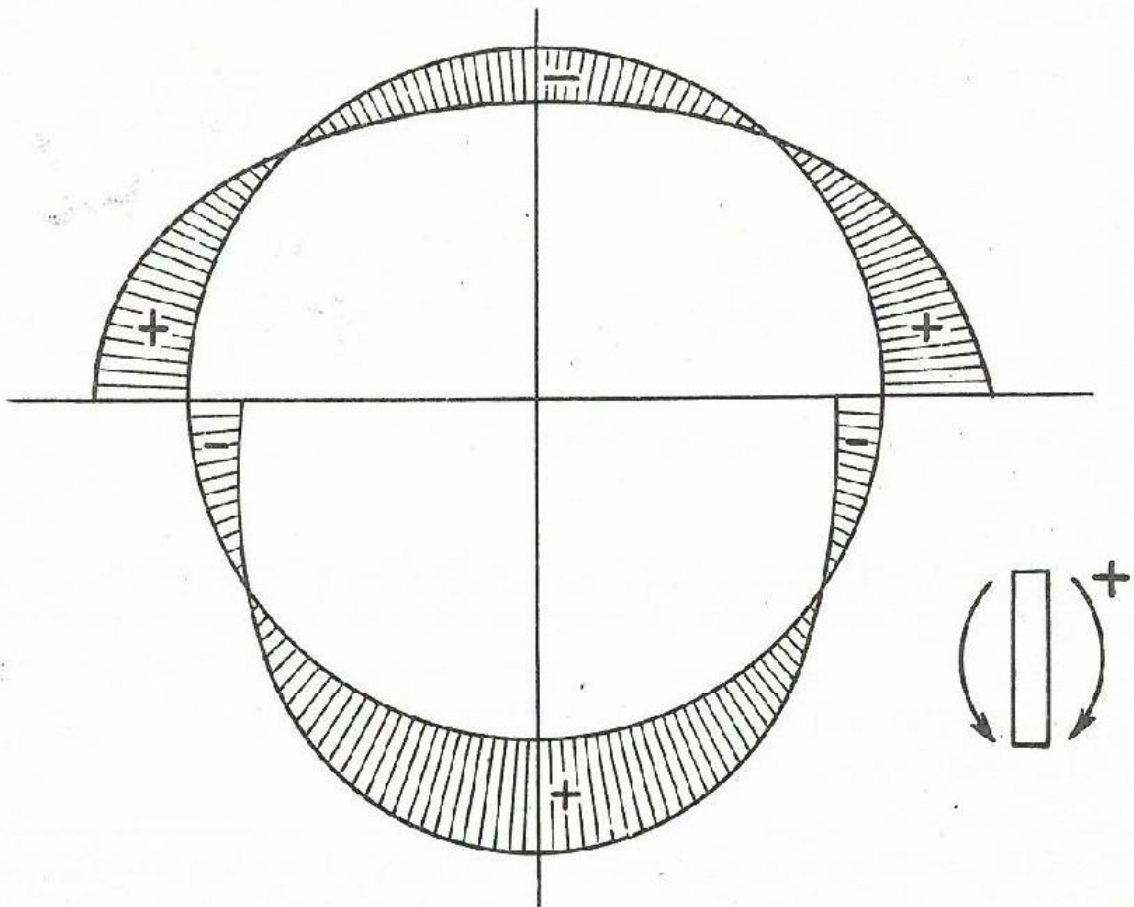
$$\boxed{2 R N_B + 2 M_B + M = 0} \quad (4)$$

Entre (3) y (4), obtenemos:

$$M_B = \frac{M \pi}{4 (\pi - 1)}$$

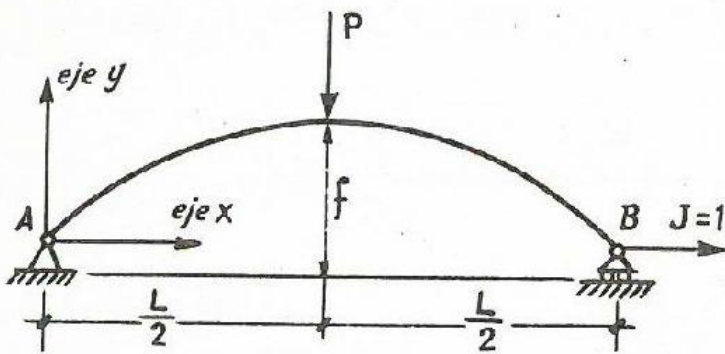
$$N_B = -\frac{(3\pi - 2)M}{4 R (\pi - 1)}$$

Sustituyendo estos valores en (1) y (II) tenemos la ley de M_f , que tendrá aproximadamente la forma de la figura.



Ejemplo 11.

La directriz del arco de la figura, es una parábola de 2º grado, de luz L y flecha en el centro f , y con una sección recta definida por la relación



$$\frac{ds}{I} = \frac{dx}{I_0}$$

$$(I_0 = C^{te}).$$

Se pide determinar el corrimiento horizontal del punto B cuando actúa una fuerza vertical P en el centro del arco (se desprecia la influencia de los esfuerzos normales).

La ecuación de la directriz del arco es:

$$y = kx(L-x), \quad \text{siendo} \quad k = \frac{4f}{L}$$

Ley de M_f^I debidos a las fuerzas P:

$$M_f^I \Big|_0^{L/2} = \frac{P}{2} \cdot x \quad ; \quad M_f^I \Big|_{L/2}^L = \frac{P}{2} (L-x)$$

y la debida a un influjo I := 1 aplicado en B, será:

$$M_f^{II} \Big|_0^L = 1 \cdot y = kx(L-x)$$

Así que el corrimiento de B vendrá dado por:

$$u = \int_0^L M_f^I M_f^{II} \cdot d\varphi = \int_0^{L/2} \frac{P}{2} \cdot x \cdot kx(L-x) \frac{ds}{EI} + \int_{L/2}^L \frac{P}{2} (L-x) \cdot kx(L-x) \frac{ds}{EI}$$

y como $\frac{ds}{I} = \frac{dx}{I_0}$, podremos efectuar la integración y obtenemos

$$u = \frac{Pk}{2EI_0} \left[\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] \Big|_0^{L/2} + \frac{Pk}{2EI_0} \left[\frac{L^2 x^2}{2} - 2L \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right] \Big|_{L/2}^L$$

De aquí, sacamos que

$$u = \frac{P \cdot k}{2 EI_0} \cdot \frac{5L^4}{96}$$

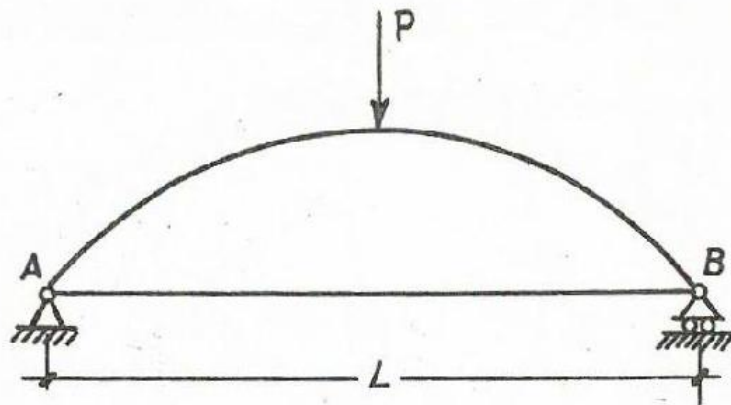
-o-

Ejemplo 12

Si en el problema anterior suponemos un tirante AB. Calcular el esfuerzo axil en dicho tirante. Siendo Ω_t y E_t la sección y el módulo de elasticidad del tirante.

En este caso, tendremos:

$$M_f \Big|_0^{L/2} = \frac{P}{2} x - KNx(L-x)$$



$$M_f \Big|_{L/2}^L = \frac{P}{2} (L-x) - KNX(L-X)$$

$$M_f \Big|_{L/2}^L = \frac{P}{2} (L-X) - KN(L-X)$$

$$u_B = \int_0^L = M_f \frac{\partial M_f}{\partial N} d\varphi = \int_0^{L/2} - \left(\frac{P}{2} x - KNX(L-X) \right) \frac{KX(L-X)}{EI_0} dx +$$

$$+ \int_{L/2}^L - \left[\frac{P}{2} (L-X) - KN(L-X) \right] \frac{KX(L-X)}{EI_0} dx$$

$$u_B = \frac{5 PKL^4}{192 EI_0} - \frac{K^2 N L^5}{30 EI_0}$$

Debido al esfuerzo N el tirante experimenta un alargamiento

$$U_t = \frac{N \cdot L}{E_t \Omega_t}$$

Como $U_B = U_B$, resulta:

$$N = \frac{75}{96} \frac{E_t \Omega_t \cdot P \cdot K \cdot L^3}{K^2 L \Omega_t^2 E_t + 30 EI_0}$$

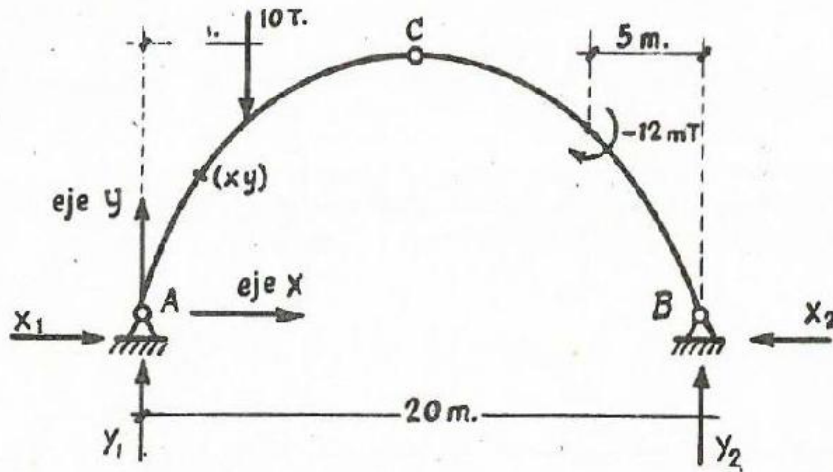
Ejemplo 13.

- 0 -

Un arco triarticulado tiene 20 m de luz y 8 m de flecha. La articulación intermedia está en el punto medio de la luz. Su directriz es una parábola de 2º grado con el vértice en la articulación intermedia.

A 5 metros del extremo izquierdo actúa una carga concentra-

da de 10 Tns y a 5 m del extremo derecho actúa un momento exterior de -12 m. tn.



Calcular:

- 1º. Valores de las reacciones.
- 2º. Dibujar la ley de momentos flectores.
- 3º. Valores de los esfuerzos en las articulaciones medias.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = 10 - y_2 \end{array}$$

Tomando momentos en A resulta $y_2 = 6,9 \text{ T.}$

" " " C " ' $x_2 = 2,1 \text{ T.}$

$$x_1 = 2,1 \quad x_2 = + 2,1$$

$$y_1 = 6,9 \quad y_2 = 3,1$$

En C tendremos $\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 2,1 \\ R_2 = 3,1 \end{array} \right.$

Ley de momentos:

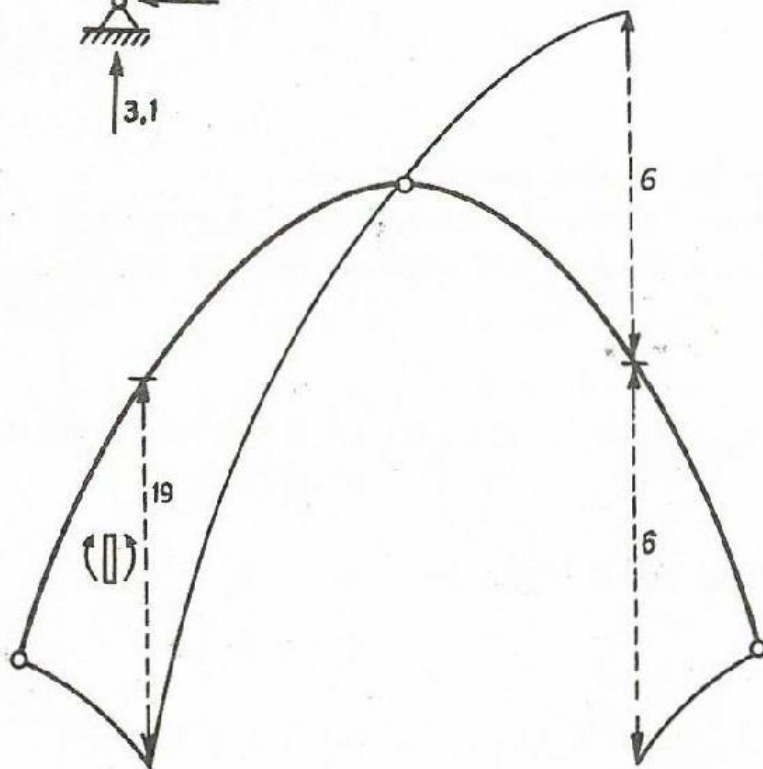
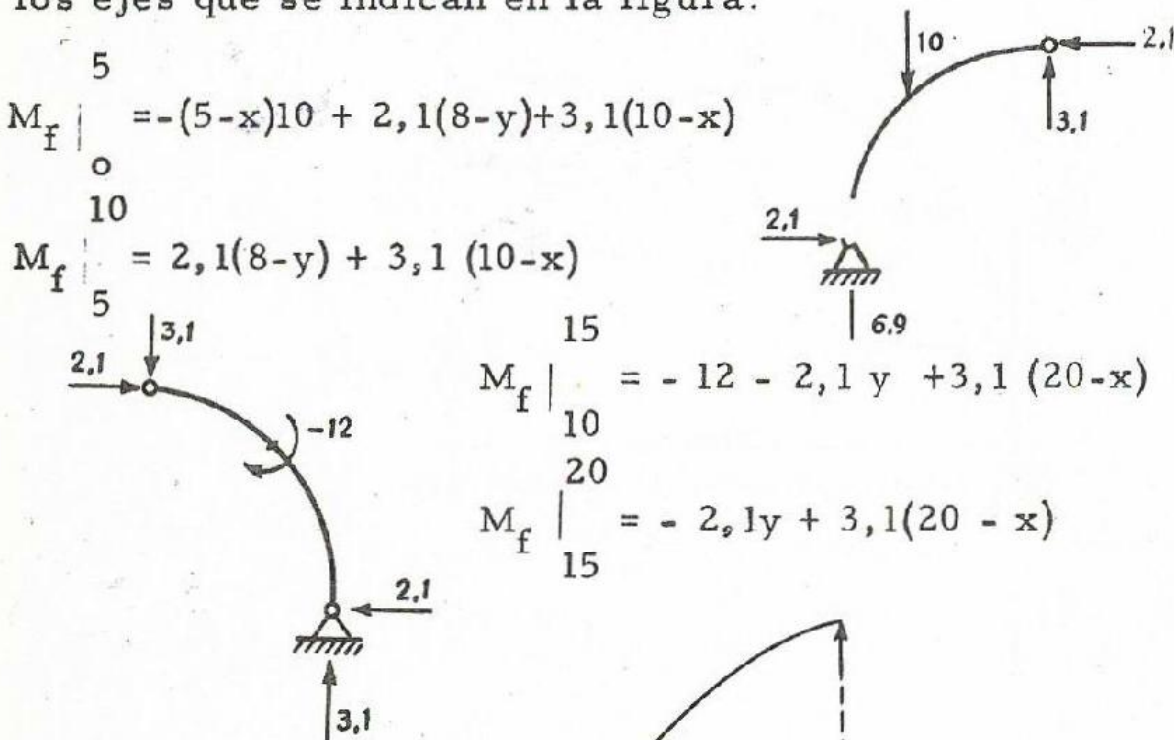
La ecuación de la parábola es: $(x-10)^2 = -\frac{25}{2}(y-8)$ referida a los ejes que se indican en la figura:

$$M_f \Big|_0^5 = -(5-x)10 + 2,1(8-y) + 3,1(10-x)$$

$$M_f \Big|_5^{10} = 2,1(8-y) + 3,1(10-x)$$

$$M_f \Big|_{10}^{15} = -12 - 2,1y + 3,1(20-x)$$

$$M_f \Big|_{15}^{20} = -2,1y + 3,1(20-x)$$



Ejemplo 14.

Un arco cuya directriz es una parábola de 2º grado tiene de luz 25 mts. y la flecha en el centro vale 8 m. Está sometido a una sobrecarga uniforme de 3 Tm/m^l. por metro lineal de proyección y su sección varía de acuerdo con la ley $\frac{ds}{I} = \frac{dx}{I_0}$.

($I_o =$ constante dada).

Se pide:

1º) Leyes de M_f , Q y N para el caso de arco biempotrado.

Se prescinde de la influencia del esfuerzo axial en la deformación.

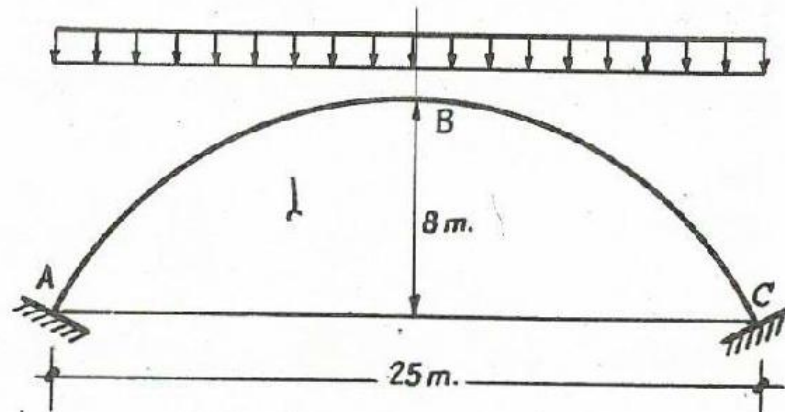


FIG. I

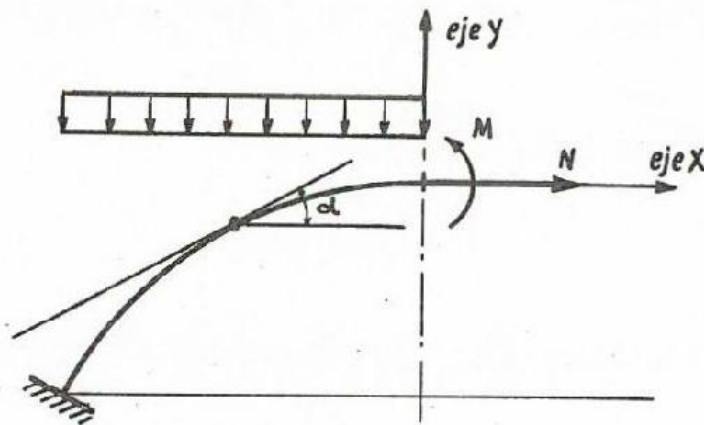


FIG. II

Por la simetría de la figura I en la sección B se verifica:

- 1) El esfuerzo cortante nulo.
- 2) $\omega_B = 0$ es decir, la sección no gira en la deformación.
- 3) $u_B = 0$ no experimenta corrimiento horizontal.

Podemos sustituir el sistema de la figura I por el de la figura II.

Ecuación de la directriz $y = ax^2$.

$$x = -12,5 \quad c = -\frac{32}{625} \quad y = -\frac{32}{625} x^2$$

$$y = -8$$

Ley de M_f .

$$M_f = M - Ny - \frac{3}{2} x^2 = M - \frac{32}{625} N x^2 - \frac{3}{2} x^2 =$$

$$= M - \left(\frac{32}{625} N + \frac{3}{2}\right) x^2 = M + (aN - \frac{3}{2}) x^2$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial M} = 1 \quad \frac{\partial M_f}{\partial N} = -\frac{32}{625} x^2 = ax^2$$

$$u_B = \int_{-L/2}^0 [M + aNx^2 - \frac{3}{2} x^2] ax^2 \frac{dx}{EI_0} = 0 \rightarrow 40a \cdot M - (2aN - 3)3L^2 = 0 \quad (1)$$

$$\omega_B = 0 = \int_{-L/2}^0 [M + aNX^2 - \frac{3}{2} x^2] \frac{dx}{EI_0} = 0 \rightarrow 20M - (2aN - 3)L^2 = 0 \quad (2)$$

Entre (1) y (2) obtenemos $M = 0$

$$N = \frac{3}{2a}$$

Ley de M_f

$$\left(a \frac{3}{2a} - \frac{3}{2}\right) x^2 = 0 \quad M_f = 0$$

Ley de Q

$$Q = 0$$

Ley de esfuerzos axiales N.

$$N = + N \cos \alpha - R \operatorname{sen} \alpha \quad R = 3x$$

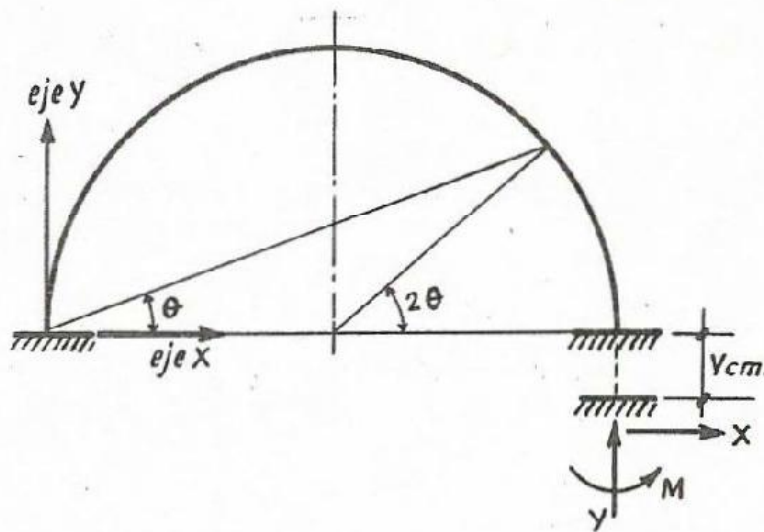
$$N = \frac{3}{2a} \cos \alpha - 3x \operatorname{sen} \alpha$$

$$y = ax^2 \quad y' = 2ax = \operatorname{tg} \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \frac{2ax}{1+4a^2x^2} \\ \cos \alpha = \frac{1}{1+4a^2x^2} \end{array} \right\}$$

$$N = \left[\frac{3}{2a} - 3x \cdot 2ax \right] \frac{-1}{\sqrt{1+4a^2 x^2}} = \frac{3}{2a\sqrt{1+4a^2 x^2}} [1-4a^2 x^2]$$

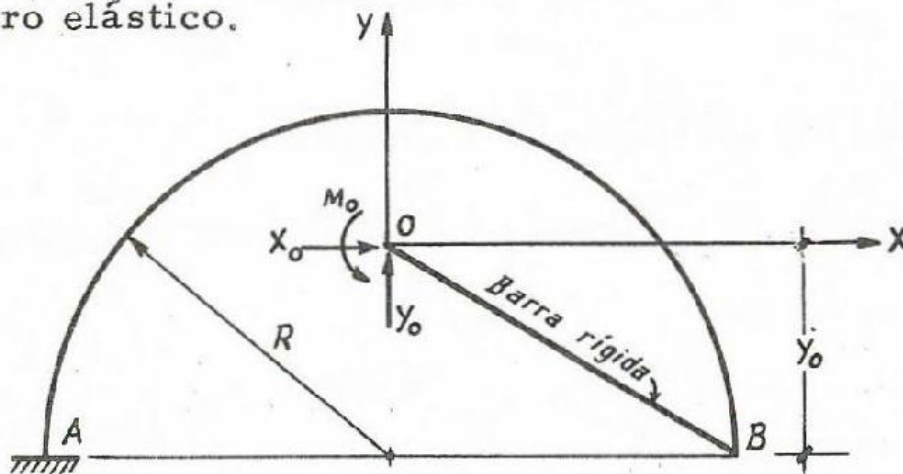
Ejemplo 15.

El apoyo derecho de un arco semicircular biempotrado experimenta un descenso vertical (sin girar) de V cm. Calcular la ley de M_f (Despréciase la influencia del esfuerzo axial en la de formación. Se prescinde del peso propio).



Ejemplo:

Resolver el problema anterior refiriendo los ejes coordenados al centro elástico.



El centro elástico coincide con el centro de gravedad del arco de círculo. Por lo tanto,

$$y_o = \frac{2R}{\pi}$$

La expresión del momento flector en una rebanada cualquiera es:

$$M_f = X_o \cdot y - Y_o \cdot x + M_o$$

Ahora tendremos que expresar que los movimientos u y ω del extremo 0 de la barra rígida son nulos y que el corrimiento vertical vale $-v$.

$$u = \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial X_o} d\varphi = \int_{ed}^{ef} (X_o \cdot y - Y_o \cdot x + M_o) y \cdot d\varphi = 0$$

$$-v = \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial Y_o} d\varphi = \int_{ed}^{ef} -(X_o y - Y_o x + M_o) x \cdot d\varphi$$

$$\omega = \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M_o} d\varphi = \int_{ed}^{ef} (X_o y - Y_o x + M_o) d\varphi = 0$$

Desarrollando las integrales y recordando que por estas referidas al centro elástico,

$$\int_{ed}^{ef} x d\varphi = 0 \quad \int_{ed}^{ef} y d\varphi = 0$$

nos quedan las ecuaciones reducidas a

$$u = 0 = X_o \int_{ed}^{ef} y^2 d\varphi - Y_o \int_{ed}^{ef} xy d\varphi \quad (a)$$

$$v = -X_o \int_{ed}^{ef} xy d\varphi + Y_o \int_{ed}^{ef} x^2 d\varphi \quad (b)$$

$$\omega = 0 = M_o \int_{ed}^{ef} d\varphi \quad (c)$$

Los valores de las integrales son:

$$\int_{ed}^{ef} y^2 \cdot d\varphi = \int_0^{\pi} (-y_0 + R \operatorname{sen}\vartheta)^2 \frac{R d\vartheta}{EI} = \frac{R^3}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$$

$$\int_{ed}^{ef} xy \, d\varphi = \int_0^{\pi} R \cos\vartheta (-y_0 + R \operatorname{sen}\vartheta) \frac{R d\vartheta}{EI} = 0$$

$$\int_{ed}^{ef} x^2 \, d\varphi = \int_0^{\pi} R^2 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \frac{R d\vartheta}{EI} = \frac{R^3}{EI} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{ed}^{ef} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{R \cdot d\vartheta}{EI} = \frac{R}{EI} \cdot \pi$$

Obtenidos estos valores de (a), (b) y (c) sacamos respectivamente:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 = -\frac{2 EI v}{\pi R^3} \\ M_0 = 0 \end{cases}$$

y los valores de las reacciones en el empotramiento B, serán:

$$X_B = 0 \quad ; \quad Y_B = Y_0 = \frac{-2 EI v}{\pi R^3}$$

$$y \quad M_B = -Y_0 \cdot R = \frac{2 EI v}{\pi R^2}$$

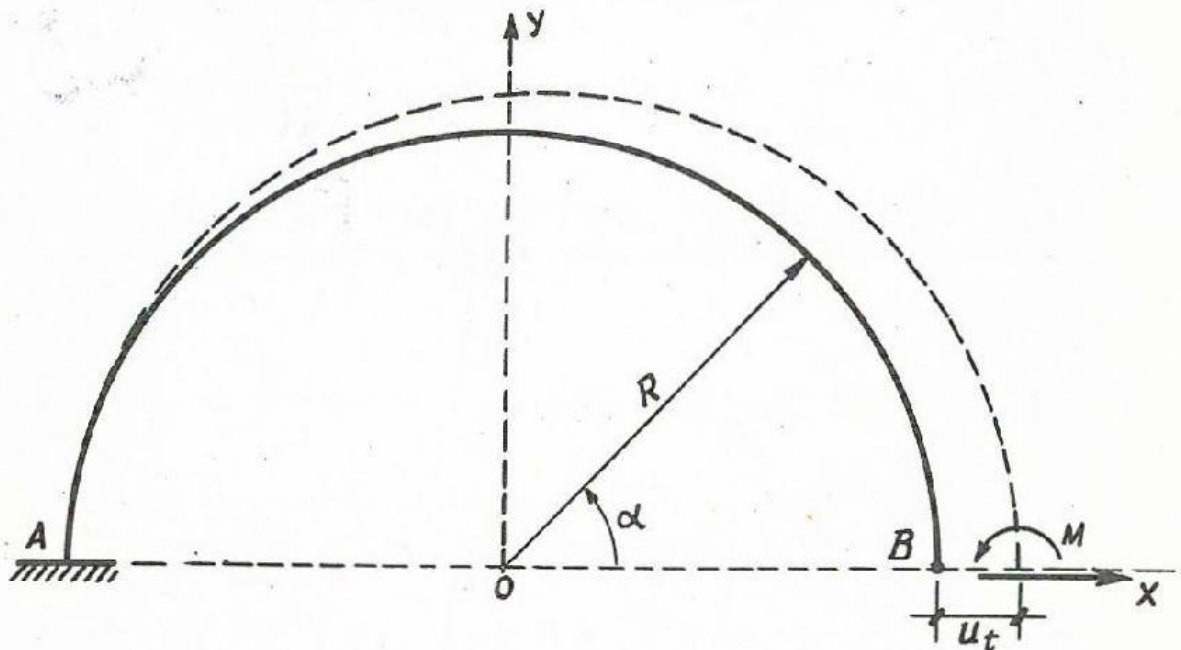
La ley de distribución de los momentos flectores es, pues:

$$\begin{aligned} M_f \Big|_B^A &= M_B + Y_B \cdot (R-x) = \\ &= \frac{2 EI v}{\pi R^2} - \frac{2 EI v}{\pi R^3} (R-x) \end{aligned}$$

Ejemplo 16.

Calcular la ley de M_f de un arco circular empotrado en sus

dos extremos, de radio R y sección constante, sometida a un calentamiento uniforme de temperatura t .



Intuitivamente se ve que, habiendo quitado el empotramiento en B, el efecto de la elevación uniforme de temperatura es un desplazamiento horizontal del punto B, de valor u_t .

Como en este caso $N d\varepsilon = kt ds$ tendremos que:

$$u_t = \int_{ed}^{ef} N d\varepsilon \cos \alpha = \int_{ed}^{ef} kt ds \cos \alpha = \int_{-R}^{+R} kt dx$$

$$\underline{\underline{u_t = 2 kt T}}$$

De las expresiones analíticas de v_t y ω_t se deduce también - que estos movimientos son, para este caso, nulos.

Ahora tendremos que encontrar el valor de X y de M, que nos devuelvan al punto B a su posición inicial y sin que haya girado la sección.

(No existe reacción vertical por la simetría que existe respecto a OY y la ausencia de cargas exteriores).

La ley de momentos, consecuencia de X y de M, valdrá:

$$M_f = X \cdot R \operatorname{sen} \alpha + M$$

El corrimiento \underline{u} , que ha de ser igual y contrario que el \underline{u}_t valdrá:

$$u = \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial X} d\varphi = \int_0^\pi (X \cdot R \operatorname{sen} \alpha + M) R \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{R d\alpha}{EI} = - u_t$$

queda:

$$\frac{R^2}{EI} \left[\frac{X R \pi}{2} + 2M \right] = - 2 k t R \quad (1)$$

Ahora, expresaremos que el giro $\underline{\omega}$ producido por X y M, debe ser nulo:

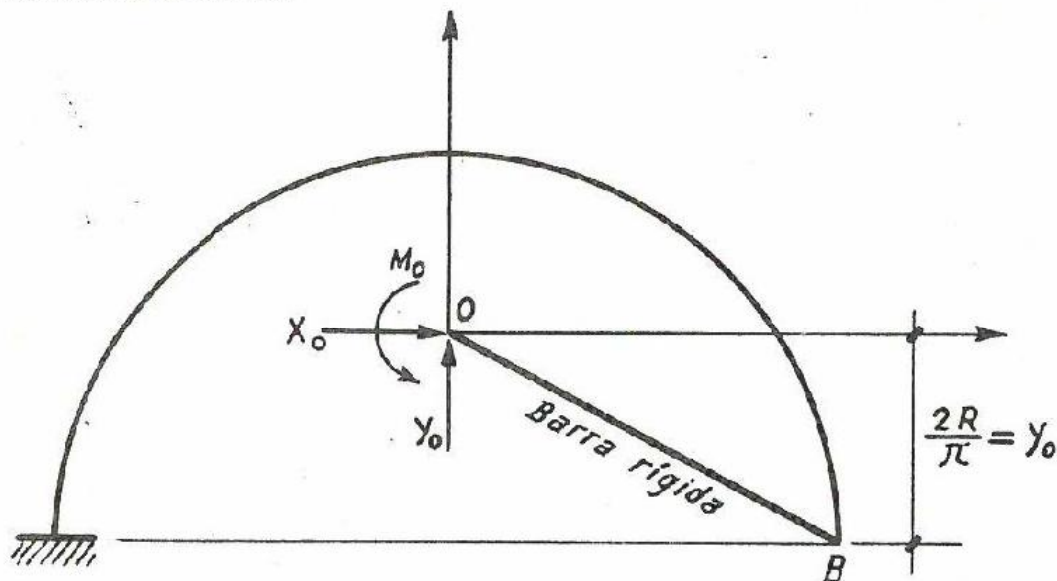
$$= \int_{ed}^{ef} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} d\varphi = \int_0^\pi (X \cdot R \operatorname{sen} \alpha + M) \cdot 1 \cdot \frac{R d\alpha}{EI} = 0$$

nos queda:

$$\frac{R}{EI} [2 X R + M] = 0 \quad (2)$$

Entre (1) y (2) despejamos M y X y resulta:

$$\underline{X} = \frac{-4\pi kt \cdot EI}{R^2 (\pi^2 - 8)} \quad \text{y} \quad \underline{M} = \frac{8 kt EI}{R (\pi - 8)}$$



De otra forma más sencilla, utilizando el método del centro elástico como los valores de los movimientos del extremo o - son:

$$u_t = 2 kt R$$

$$v_t = 0$$

$$\omega_t = 0$$

Las ecuaciones (a), (b) y (c) del problema anterior, quedan

$$u = -u_t = -2ktR = X_o \int_{ed}^{ef} y^2 \cdot d\varphi - Y_o \int_{ed}^{ef} xy \, d\varphi$$

$$v = -v_t = 0 = -X_o \int_{ed}^{ef} xy \, d\varphi + Y_o \int_{ed}^{ef} x^2 \cdot d\varphi$$

$$\omega = -\omega_t = 0 = M_o \int_{ed}^{ef} d\varphi$$

y utilizando los valores de las integrales antes halladas, resulta=

$$Y_o = 0$$

$$M_o = 0$$

$$-2 kt R = X_o \cdot \frac{R^3}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)$$

$$X_o = \frac{-4\pi kt EI}{R^2 (\pi^2 - 8)}$$

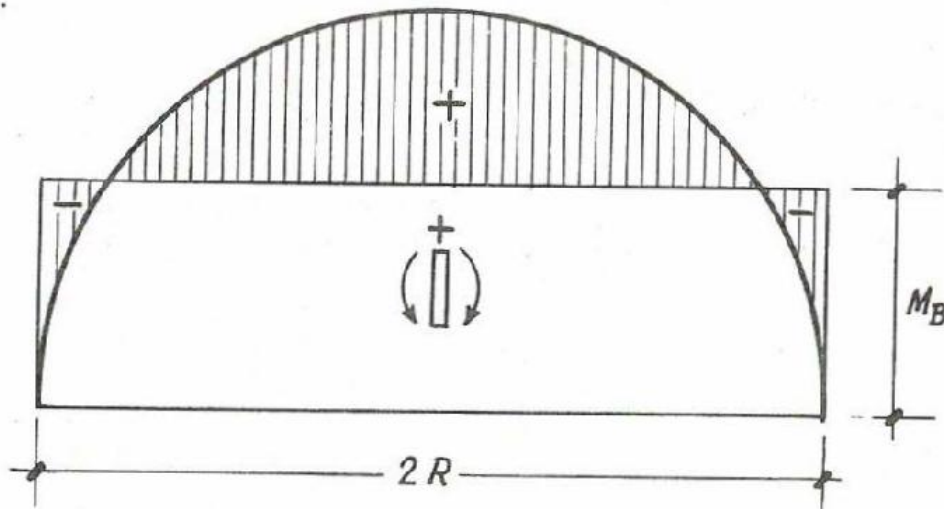
y los valores de las reacciones en el empotramiento B serán, según esto:

$$X_B = X_o = \frac{-4\pi kt EI}{R^2 (\pi^2 - 8)}$$

$$Y_B = Y_o = 0$$

$$M_B = M_o - X_o \cdot y_o = + \frac{4\pi kt EI}{R^2 (\pi^2 - 8)} \cdot \frac{2 R}{\pi}$$

valores que coinciden con los obtenidos por el primer método empleado:



Ejemplo 17.

Como consecuencia del efecto solar se produce en el arco semicircular biempotrado que se adjunta una distribución de temperaturas uniforme a lo largo de la directriz y lineal según canto con temperaturas de t_1^0 en el trasdós y t_2^0 en el intradós ($t_1 > t_2$) verificándose además que:

$$t_0^0 = \frac{t_1^0 + t_2^0}{2}$$

siendo t_0^0 la temperatura inicial de todo el arco.

Determinar la ley de M_f que se produce debida a esta distribución de temperatura.

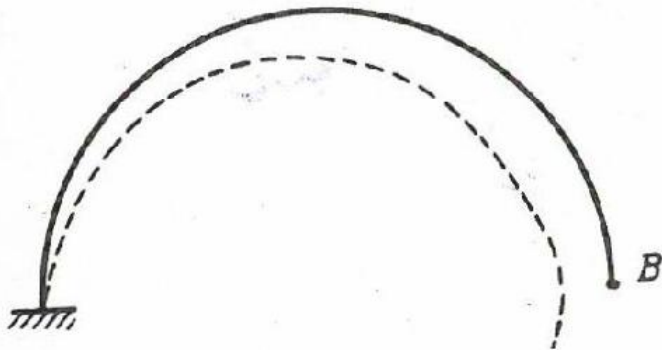
Siendo c el espesor constante de la pieza en una rebanada cualquiera, tendremos:

$$M_f d\varphi = -k \frac{(t_1 - t_0) - (t_2 - t_0)}{c} ds = -k \frac{t_1 - t_2}{c} ds$$

$$N ds = k \frac{(t_1 - t_0) + (t_2 - t_0)}{2} ds = 0$$

Así que cada rebanada estará solicitada exclusivamente por un M_f de valor:

$$M_f = -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot EI$$



Si quitamos el empotramiento en B se producirá una deformación de la pieza y unos corrimientos \underline{u} , \underline{v} y un giro $\underline{\omega}$ del extremo B.

Ahora bien, si en el extremo B actuase un momento M igual y contrario al M_f producido por la temperatura en cada rebanada, entonces el punto B y toda la pieza volvería a su posición, pues en cada rebanada

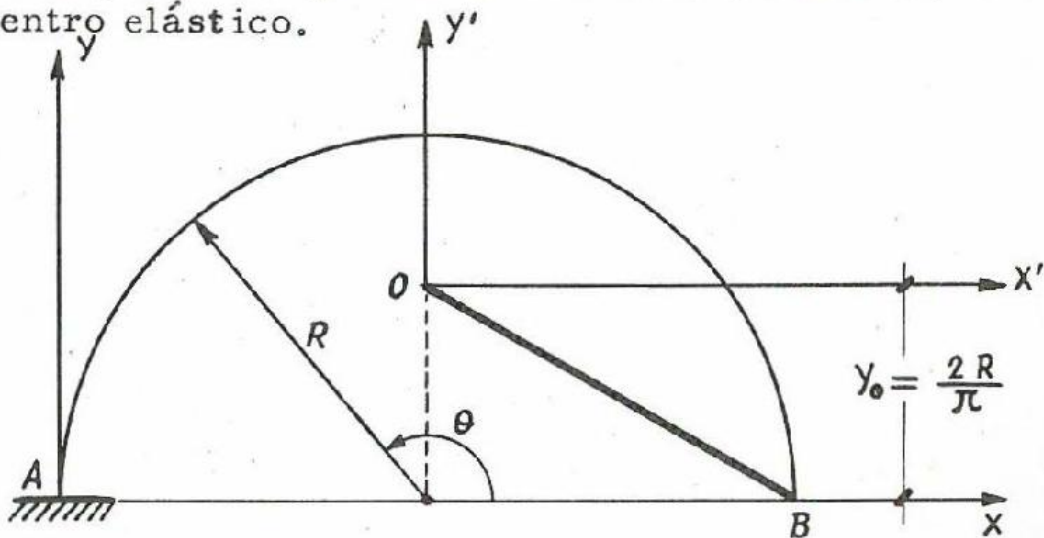
actuaría un momento flector igual y contrario al que actuaba inicialmente y los movimientos de la estructura serían iguales y de signo contrario a los producidos por efecto de la temperatura.

Entonces, sólo hay momento de empotramiento en B de valor:

$$M_B = -M_f = k \frac{t_1 - t_2}{c} EI \quad (\square)$$

$$\underline{Y_B} = \underline{X_B} = 0$$

Este mismo problema podemos resolverlo, también, utilizando el centro elástico.



Los movimientos de B debidos al efecto de la temperatura son: referidos a los ejes XY con origen en A.

$$u_t = \int_{ed}^{ef} -k \frac{t_1 - t_2}{c} ds, y = \int_0^\pi -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot R d\theta \cdot R \operatorname{sen} \theta = -2k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot R^2$$

$$v_t = \int_{ed}^{ef} -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot ds (2R - x) = \int_0^\pi -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot R d\theta \cdot R (1 - \cos \theta) =$$

$$= -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot \pi R^2$$

$$\omega_t = \int_{ed}^{ef} -k \frac{t_1 - t_2}{c} ds = -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot \pi R$$

Entonces los movimientos del extremo O de la barra rígida serán:

$$u_o = u_t - \omega_t \cdot y_o$$

$$v_o = v_t - \omega_t \cdot R$$

y por lo tanto,

$$u_o = -2k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot R^2 + \pi k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot \frac{2R}{\pi} = 0$$

$$v_o = -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot \pi R^2 + k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot \pi R^2 = 0$$

$$\omega_o = \omega_t = -k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot \pi R$$

y, por lo tanto, utilizando las mismas expresiones (a), (b) y (c) que en anteriores problemas, resulta:

$$X_o = 0$$

$$Y_o = 0$$

$$y \quad M_o = \frac{\omega_t}{\int_{ed}^{ef} d\varphi} = \frac{-k \frac{t_1 - t_2}{c} \cdot R}{\frac{\pi R}{EI}} = -k \frac{t_1 - t_2}{c} EI$$

y en el empotramiento B, de acuerdo con estos resultados:

$$X_B = Y_B = 0$$
$$M_B = M_B = -k \frac{t_1 - t_2}{c} EI$$

INDICE

Pág.

1-1. Hipótesis fundamentales de la resistencia de materiales; 1-2. Esfuerzos a que puede estar sometida una rebanada; 1-3. Tracción y compresión simples.....	3
2-1. Flexión pura. - 2-2. Flexión simple; 2-3. Flexión compuesta.....	19
3-1. Enlaces; 3-2. Isostáticas. - Hiperestáticas; 3-3. Reacciones y esfuerzos en piezas isostáticas.....	49 <u>6</u>
4-1. Deformaciones; 4-2. Teoremas de Mohr. - 4-3. - Ecuaciones de la elástica. - 4-4. Teoremas de Castigliano.....	92 <u>8</u>
5-1. Vigas hiperestáticas; 5-2. Vigas continuas. Teoría de los tres momentos. Utilización de ábacos. Descensos de apoyos.....	133 <u>10</u>
6-1. Línea de influencia; 6-2. Cargas móviles.....	186 <u>11</u>
7-1. Pórticos.....	222 <u>14</u>
8-1. Piezas curvas.; 8-2. Centro elástico.....	260 <u>16</u>

-o-o-o-

-o-

